



universität  
wien

# DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

## **Stochastische Differentialgleichungen: Erweiterung deterministischer Modelle um zufällige Einflüsse**

Angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Verfasserin:	Alice Lakits
Matrikel-Nummer:	0403306
Studienrichtung:	A 405 Mathematik
Betreuer:	a.o. Univ. - Prof. Dr. Peter Raith

Wien, im November 2010



# Abstract

In this diploma thesis, a short introduction into the theory of stochastic differential equations is given. Informally spoken, a stochastic differential equation is a way to mathematically describe processes whose time evolution is not only deterministic, but also influenced by random events. Hereby, the random events are assumed to be normally (Gaussian) distributed.

In the following, the contents of every chapter will be described shortly.

Chapter 1 comprises a short motivation why randomness should be included in the theory of ordinary differential equations. With the help of a first example of a stochastic differential equation, the requirements on the differential equation which are needed in this context are illustrated.

The necessary theoretical background for this work is presented in chapter 2. First, the most important theorems and definitions from probability and measure theory are recapitulated. Then, some important properties of the expectation of a random variable are deduced, which will be an important tool in the following chapters and sections. Furthermore, several types of convergence are defined and an important limit theorem is stated. In section 1.4, the basic principles of stochastic processes are introduced and these stochastic processes, which fulfil certain additional properties as e.g. continuity, are presented. The Brownian Motion is the most important stochastic process for the theory of differential equations. The next sections describe how with the help of the Brownian Motion, one defines stochastic integrals which have important properties, here in particular the martingale property. At the end of this first sub-chapter, the white noise which represents the random influence in stochastic differential equations is presented and identified with the Brownian Motion. The next subsection tackles the meanwhile unavoidable definition of stochastic integrals. After having defined it for step functions, a larger class of functions is included in this definition. In section 2.3 the most important properties for the use of the stochastic integral are outlined. Next, its definition is extended once more to a slightly larger class of functions and the Itô formula is deduced, which is an important tool in the theory of stochastic differential equations.

In the last chapter, stochastic differential equations are introduced theoretically and with the help of two examples. Section 3.1 tackles the most important definitions and the examples are explained in the context of ordinary differential equations. Later, randomness will be introduced in these examples, and the resulting changes will be presented. The most important theorem of existence and uniqueness for the stoastic initial value problem

---

is proven in detail. It imposes certain requirements on the coefficients and the initial condition. The examples from the first section are revisited, now including randomness. In the following, dependence on the initial condition, continuity and boundedness of the solution is proven. Since most times, it is not possible to analytically solve a stochastic differential equation, the concept of numerical approximation of solutions is presented. In particular, the Euler approximation is introduced which gives a numerical solution for discrete times. The approximation error is estimated both analytically and numerically with estimation of the confidence interval.

# Zusammenfassung

Mit dieser Diplomarbeit wird eine kurze Einführung in die Theorie der stochastischen Differentialgleichung gegeben. Eine stochastische Differentialgleichung ist, salopp gesagt, eine Möglichkeit um mathematische Prozesse zu beschreiben, deren zeitliche Entwicklung nicht nur deterministisch ist, sondern auch durch Zufälligkeiten beeinflusst wird. Hier werden die zufälligen Ereignisse als normalverteilt angenommen.

Nun folgt eine kurze Beschreibung des Inhaltes der einzelnen Kapitel.

Kapitel 1 umfasst eine Motivation, aus welchem Grund man versucht die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Zufälligkeiten auszudehnen. Weiters wird anhand eines Beispiels gezeigt, dass man dabei Voraussetzungen an die Differentialgleichungen stellen muss.

In Kapitel 2 wird auf die notwendigen Grundlagen eingegangen um stochastische Differentialgleichungen behandeln zu können. In Abschnitt 1.1 werden wichtige Sätze und Definitionen der Wahrscheinlichkeits- und der Maßtheorie behandelt. In den folgenden Abschnitten 1.2 und 1.3 werden grundlegende Eigenschaften des Erwartungswerts hergeleitet, die in den späteren Abschnitten und Kapiteln ein bedeutendes Beweisinstrument sein werden. Außerdem werden die möglichen Arten der Konvergenz definiert und der wichtigste Grenzwertsatz wird behandelt. In Abschnitt 1.4 werden die Grundlagen der stochastischen Prozesse erklärt und jene Prozesse behandelt, die gewisse zusätzliche Eigenschaften, wie etwa Stetigkeitsbedingungen, erfüllen. In 1.5 wird dann, der für die stochastischen Differentialgleichungen wichtigste stochastische Prozess behandelt, die Brown'sche Bewegung. Mit deren Hilfe ist es möglich stochastische Integrale zu definieren, die darüber hinaus einige wichtige Eigenschaften erfüllen, wie etwa die Martingal – Eigenschaft. Abschnitt 1.6 geht auf die Störungen ein, durch die Differentialgleichungen beeinflusst werden und ermöglicht die Identifizierung des weißen Rauschens mit der Brown'schen Bewegung. Zu Beginn von Abschnitt von 2.1 wird die Notwendigkeit erläutert stochastische Integrale zu definieren. In Abschnitt 2.2 wird das stochastische Integral für Treppenfunktionen definiert und dann auf eine bestimmte Klasse von Funktionen ausgedehnt. In 2.3 werden die wichtigsten Eigenschaften behandelt, die wesentlich für den Gebrauch von stochastischen Integralen sind. Im Anschluß wird das stochastische Integral auf eine etwas größere Klasse von Funktionen ausgedehnt und die Itô – Formel erläutert, die ein notwendiges Werkzeug in der Theorie der stochastischen Differentialgleichungen ist.

In Kapitel 3 werden stochastische Differentialgleichungen theoretisch und an zwei Beispielen behandelt. In Abschnitt 3.1 werden die grundlegenden Definitionen angeführt und

---

die zwei Beispiele im Rahmen der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen analysiert. Diese werden zu einem späteren Zeitpunkt mit Zufälligkeiten behandelt. In 3.2 wird der wichtige Existenz- und Eindeigkeitssatz erläutert und bewiesen, der unter bestimmten Voraussetzungen an die Koeffizienten und die Anfangsbedingung eine eindeutige Lösung garantiert. Außerdem werden die Beispiele von Abschnitt 3.1 nun mit Zufälligkeiten besprochen. In den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2 werden mögliche Arten von Lösungen und wichtige Eigenschaften, wie die Abhängigkeit von der Anfangsbedingung und die Beschränktheit, behandelt. Außerdem wird gezeigt, dass die Lösung bestimmte Stetigkeitsvoraussetzungen erfüllt. Im letzten Abschnitt 3.3 wird ein kleiner Ausblick in die numerische Approximation von Lösungen gegeben, da es, wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen, nur selten möglich ist die Lösung analytisch anzugeben. Im Speziellen wird eine Methode zur Approximation einer solchen Lösung für diskrete Zeit vorgestellt, die Euler – Approximation. Um diese Approximation mit der exakten Lösung vergleichen zu können wird zuletzt noch der Fehler geschätzt und ein Zuverlässigkeitsintervall angegeben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation und Beispiele . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Vorbereitungen</b>	<b>3</b>
2.1	Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen . . . . .	3
2.1.1	Wahrscheinlichkeitsraum und Zufallsvariablen . . . . .	3
2.1.2	Erwartungswert und bedingter Erwartungswert . . . . .	6
2.1.3	Konvergenz und Grenzwertsätze . . . . .	9
2.1.4	Stochastische Prozesse . . . . .	10
2.1.5	Wiener Prozess/Brown'sche Bewegung . . . . .	14
2.1.6	Weißes Rauschen . . . . .	19
2.2	Itô Integrale . . . . .	20
2.2.1	Einleitung . . . . .	20
2.2.2	Definition des stochastischen Integrals . . . . .	21
2.2.3	Eigenschaften des stochastischen Integrals . . . . .	25
2.2.4	Erweiterungen des Itô – Integrals . . . . .	26
2.2.5	Itô Formel . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Stochastische Differentialgleichungen</b>	<b>31</b>
3.1	Grundlagen . . . . .	31
3.2	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	33
3.2.1	Starke und schwache Lösungen . . . . .	42
3.2.2	Eigenschaften von Lösungen . . . . .	43
3.3	Numerische Approximation der Lösung . . . . .	53
3.3.1	Euler – Approximation für stochastische Differentialgleichungen . .	53
	<b>Curriculum Vitae</b>	<b>67</b>





# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Motivation und Beispiele

Um das Thema der stochastischen Differentialgleichungen zu behandeln, geht man von der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form  $\frac{dx}{dt} = x' = f(t, x)$  mit einem Anfangswert  $x(t_0) = x_0$  zu einem gegebenen Zeitpunkt  $t_0$  aus, die einfache Beschreibungen z.B. der Zeitentwicklung physikalischer Systeme sind. Ein Beispiel dafür ist die Ladung  $Q(t)$  eines elektrischen Stromkreises an einem Fixpunkt zur Zeit  $t$ , welche die Differentialgleichung

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F(t) \quad (1.1.1)$$

erfüllt, wobei  $L$  die Induktivität,  $R$  einen Widerstand,  $C$  die Kapazität und  $F(t)$  die Quelle des Potentials bezeichnet.

Nun versucht man Zufälligkeiten in den Systemen zu berücksichtigen, indem man das Anfangswertproblem (AWP) entsprechend anpasst. Der Anfangswert wird durch eine Zufallsvariable  $X_0$  und die Funktion  $f(t, x)$  durch eine Zufallsfunktion  $F(t, X, Y(t))$  ersetzt, wobei  $Y(t)$  eine zufällige Eingabegröße und unabhängig von der Lösung  $X$  ist. Es gibt mehrere Möglichkeiten wie man das AWP „zufällig“ macht. Die erste Möglichkeit ist, dass der Anfangswert zufällig sein kann, die zweite Möglichkeit, dass das System durch kleine Störungen beeinflusst wird. Diese Störungen, die auch weißes Rauschen genannt werden, werden durch einen stationären Gauß'schen stochastischen Prozess erzeugt, mit dem Erwartungswert 0 und der Dirac – Delta – Funktion als Kovarianzfunktion. In der Literatur der Ingenieurwissenschaft ist das weiße Rauschen sehr bekannt, da es die Überlagerung einer großen Zahl kleiner Zufallsstörungen approximativ beschreibt. Dies ist eine nützliche mathematische Idealisierung um zufällige Einflüsse, die stark schwanken, zu beschreiben. Die dritte Möglichkeit ein AWP zufällig zu machen ist durch Geburten– bzw. Todesraten. Ein Beispiel, das zu einem späteren Zeitpunkt wieder aufgegriffen werden wird, ist das des Wachstums von Bevölkerungen  $N'(t) = \alpha(t) \cdot N(t)$ , wobei  $\alpha(t)$  die zeitabhängige Wachstumsrate und  $N(t)$  die Größe der Bevölkerung zum Zeitpunkt  $t$  bezeichnet.

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist die Analyse des Zufallsanfangswertproblems

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(t, X(t), Y(t)) , \quad X(t_0) = X_0 \quad (1.1.2)$$

## 1. EINFÜHRUNG

---

und das Finden einer Lösung bzw. eines Lösungsprozesses  $X(t)$ . Außerdem interessiert man sich für die Verteilung der Lösungsprozesse im Bezug auf die Verteilungen von  $X_0$  und  $Y(t)$  und die Eigenschaften von  $F$ .

Ein Beispiel verdeutlicht allerdings, dass man mehr Informationen über die Beziehung der Zufallskomponenten der Gleichung untereinander braucht um die Lösung zu untersuchen.

**Beispiel 1.1.1.** (cf. [6, S. 65f]) Sei das AWP (1.1.2) für einen skalaren Prozess  $X(t) = X_t$  gegeben, wobei

$$F(t, X(t), Y(t)) = Y_1(t)X(t) + Y_2(t) \text{ mit } Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t))$$

einen zweidimensionalen Zufallsprozess bezeichnet.

Unter diesen Annahmen ist die formale Lösung von (1.1.2) gegeben durch

$$X_t = X_0 \cdot \exp \left[ \int_{t_0}^t Y_1(s) ds \right] + \int_{t_0}^t Y_2(u) \cdot \exp \left[ \int_u^t Y_1(s) ds \right] du.$$

Diese ist allerdings nur gültig, wenn  $Y_1$  und  $Y_2(u) \cdot \exp \left[ \int_u^t Y_1(s) ds \right]$  im Quadratmittel oder mit Wahrscheinlichkeit 1 integrierbar sind.

Um die Verteilung von  $X_t$  zu bestimmen benötigt man jedoch die Verteilungen von  $X_0$ ,  $Y_1$  und  $Y_2$ .

Wenn man andererseits das AWP als Integralgleichung schreibt, dh.

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^t Y_1(s)X(s)ds + \int_{t_0}^t Y_2(s)ds,$$

erhält man dadurch folgende Gleichung für den Erwartungswert der Lösung

$$EX_t = EX_0 + \int_{t_0}^t E(Y_1(s)X(s))ds + \int_{t_0}^t E(Y_2(s))ds.$$

Diese ist aber schwer zu analysieren, außer man kennt die Beziehung zwischen  $X$  und  $Y_1$ . Außerdem erfüllt der Erwartungswert einer Lösung im Allgemeinen nicht die gemittelte Differentialgleichung  $\frac{dx}{dt} = E(Y_1(t))x + E(Y_2(t))$ , so auch in diesem linearen Fall.

Daher wird im Folgenden immer verwendet, dass

$$F(t, X(t), Y(t)) = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)dY_t,$$

wobei  $Y(t) = W(t)$  das weiße Rauschen ist.

# Kapitel 2

## Vorbereitungen

### 2.1 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

Um die Theorie der stochastischen Differentialgleichungen zu vertiefen, benötigt man einige wichtige Resultate der Wahrscheinlichkeits- und der Maßtheorie. Damit definiert man unter anderem Wiener Prozesse und stochastische Integrale.

#### 2.1.1 Wahrscheinlichkeitsraum und Zufallsvariablen

Im folgenden Abschnitt werden die zentralen Begriffe Wahrscheinlichkeitsraum und Zufallsvariable vorgestellt. Weiters wird auf wichtige maßtheoretische Theoreme, wie etwa den Satz von Fubini, eingegangen.

**Definition 2.1.1.** Sei  $\Omega$  eine Menge. Eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  ist eine Familie von Teilmengen von  $\Omega$ , die folgende Eigenschaften hat:

- (i)  $\Omega \in \mathcal{A}$ ,
- (ii)  $\Omega$  ist abgeschlossen unter abzählbarer Vereinigung, dh.

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow A := \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A},$$

- (iii)  $\Omega$  ist abgeschlossen unter Komplementbildung, dh.

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A =: A^c \in \mathcal{A}.$$

Elemente der  $\sigma$ -Algebra sind *messbare Mengen* und das Paar  $(\Omega, \mathcal{A})$  heißt *messbarer Raum*.

**Definition 2.1.2.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum. Eine Mengenfunktion  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

- (i)  $P(\emptyset) = 0$ ,

## 2. VORBEREITUNGEN

---

(ii)  $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$ ,

(iii)  $P$  ist  $\sigma$ -additiv, dh.

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \text{ mit } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} P(A_i),$$

(iv)  $P(\Omega) = 1$ .

Das Tripel  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  heißt *Wahrscheinlichkeitsraum*, dessen Elemente als mögliche Ereignisse bezeichnet werden.

**Bemerkung 2.1.3.** (i) Wenn für ein Ereignis  $A \in \mathcal{A}$  gilt  $P(A) = 1$ , nennt man das Ereignis „fast sicher“ oder „gilt mit Wahrscheinlichkeit 1“. Allgemeiner heißt ein Ereignis fast sicher, wenn sein Komplement vom Maß Null ist.

(ii) Eine  $\sigma$ -Algebra, die im weiteren Verlauf noch sehr nützlich sein wird, ist die Borel'sche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}^n$ , die von allen offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  erzeugt wird.

Aus der Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes folgt eine wichtige grundlegende Eigenschaft:

**Satz 2.1.4. (Borel – Cantelli)**(cf. [9, S. 35]) *Sei  $P$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Für eine unendliche Folge von Ereignissen  $A_n \in \mathcal{A}$  gilt :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = 0.$$

**Beweis.** siehe [9, S. 35] □

**Definition 2.1.5.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $A_1, A_2, \dots, A_n$  mögliche Ereignisse.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  heißen *unabhängig*, wenn für jede Teilmenge  $\{i_1, \dots, i_k\}$  von  $\{1, \dots, n\}$  und  $k \in \mathbb{N}, k \leq n$ , gilt:

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}). \quad (2.1.1)$$

Analog dazu sind (Unter-) $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  unabhängig, wenn jede Wahl von Ereignissen  $A_i \in \mathcal{A}_i$  für  $i \in \mathbb{N}$  die Gleichung (2.1.1) erfüllt.

**Lemma 2.1.6. (Borel – Cantelli)**(cf. [9, S. 35 und 47]) *Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Ereignissen und  $A = \{\omega : \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$ .*

(i) *Ist  $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty$ , dann ist  $P(A) = 0$ .*

(ii) *Sind die Ereignisse  $\{A_n\}$  unabhängig und ist  $\sum_{n \geq 1} P(A_n) = \infty$ , dann ist  $P(A) = 1$ .*

**Beweis.** siehe [9, S. 35 und 47] □

Um den Begriff der Zufallsvariablen zu definieren, benötigen wir noch den Begriff der messbaren Abbildung.

**Definition 2.1.7.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ . Eine Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *messbar*, oder  $\mathcal{A}$  – *messbar*, falls gilt :  $X^{-1}(A) \in \mathcal{A} \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  offen.

Mit Hilfe dieser Definitionen kann nun der Begriff der Zufallsvariablen definiert werden.

**Definition 2.1.8.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  ein messbarer Raum. Eine  $(\mathcal{A} - \mathcal{B}^n)$  – messbare Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  nennt man *Zufallsvariable* mit Werten in  $\mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung 2.1.9.** Da die Borel'sche  $\sigma$ -Algebra nicht nur durch die offenen Intervalle, sondern auch durch die halboffenen Intervalle erzeugt werden kann, kann man den Begriff der Zufallsvariablen wie folgt charakterisieren: Im  $\mathbb{R}^1$  ist  $X$  eine Zufallsvariable genau dann, wenn

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Weiters ist  $X = (X_1, \dots, X_n)$  genau dann ein Zufallsvektor, wenn jede Komponente  $X_i$  eine Zufallsvariable ist.

**Lemma 2.1.10.** Jede Zufallsvariable erzeugt ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_X$  auf  $\mathbb{R}^n$ , dass durch  $P_X(A) := P(X^{-1}(A))$  definiert ist und auch als Verteilung von  $X$  bezeichnet wird.

**Beweis.** trivial (cf. [9, S. 84]) □

Nun da man den Begriff der Zufallsvariablen definiert hat, kann man die von einer Zufallsvariablen erzeugten  $\sigma$ -Algebra und Unabhängigkeit definieren.

**Definition 2.1.11.** (cf. [16, S. 52]) Sei  $\Omega$  eine Menge und  $X$  eine darauf definierte Zufallsvariable. Die von der Zufallsvariablen  $X$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra,  $\sigma(X)$ , ist die Vereinigung aller Teilmengen von  $\Omega$  der Form  $\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .

**Definition 2.1.12.** Seien  $X_1, \dots, X_n$  Zufallsvektoren auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann nennt man  $X_1, \dots, X_n$  *unabhängig*, wenn die von ihnen erzeugten  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{A}(X_1), \dots, \mathcal{A}(X_n)$  unabhängig sind.

Sei weiter  $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra. Eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *unabhängig* von  $\mathcal{G}$ , wenn gilt

$$P(G \cap X^{-1}(B)) = P(G) \cdot P(X^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B} \text{ und } \forall G \in \mathcal{G}.$$

## 2. VORBEREITUNGEN

---

Um einige wichtige Resultate der Integrationstheorie anwenden zu können, benötigt man noch Produkte von Wahrscheinlichkeitsräumen.

Seien also  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$  für  $i = 1, \dots, n$  Maßräume. Der Produktmaßraum  $(\Omega, \mathcal{A})$  wird durch das kartesische Produkt der  $\Omega_i$  definiert, dh.  $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ .  $\omega \in \Omega$  besteht aus dem  $n$ -Tupel  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  wobei  $\omega_i \in \Omega_i$ .

Auf  $\Omega$  wird die Produkt- $\sigma$ -Algebra definiert durch  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$ , die von den „Zylindermengen“  $A = A_1 \times \dots \times A_n$  erzeugt wird.

Sind auf den  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$  die Wahrscheinlichkeiten  $P_i$  gegeben, dann gibt es auf dem Produktraum  $(\Omega, \mathcal{A})$  genau eine Wahrscheinlichkeit, die sogenannte Produktwahrscheinlichkeit  $P = P_1 \times \dots \times P_n$ , mit der Eigenschaft  $P(A_1 \times \dots \times A_n) = P(A_1) \dots P(A_n)$  für alle  $A_i \in \mathcal{A}_i$ .

Nun zum Satz von Fubini für zwei Wahrscheinlichkeitsräume, der später von großer Bedeutung sein wird.

**Satz 2.1.13. (Fubini)**(cf. [3, S. 57]) *Seien  $X_1$  bezüglich  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$  und  $X_2$  bezüglich  $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$  unabhängige Zufallsvariablen  $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $i = 1, 2$ . Sei  $X$  eine  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 - \mathcal{B}^1$ -messbare Funktion auf  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ , die integrierbar bezüglich  $P_1 \times P_2$  oder nicht-negativ ist. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X d(P_1 \times P_2) &= \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} X(\omega_1, \omega_2) dP_2(\omega_2) \right) dP_1(\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} X(\omega_1, \omega_2) dP_1(\omega_1) \right) dP_2(\omega_2) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

**Beweis.** siehe [12, S. 14] □

Im weiteren Verlauf benötigt man noch folgende grundlegende Definition.

**Definition 2.1.14.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine *Filtration*  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ist eine Familie von  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ , sodass für alle  $s < t$  in  $\mathbb{R}^+$  gilt, dass  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ .

**Bemerkung 2.1.15.** Eine Filtration ist also eine wachsende Familie von  $\sigma$ -Algebren.

### 2.1.2 Erwartungswert und bedingter Erwartungswert

In diesem Abschnitt wird auf den Erwartungswert, den bedingten Erwartungswert und auf ihre Eigenschaften eingegangen.

**Definition 2.1.16.** Sei  $X$  eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Wenn  $\int_{\Omega} |X(\omega)| dP(\omega) < \infty$ , dh.  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , dann heißt

$$E(X) := \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} x dP_X(x)$$

der *Erwartungswert* von  $X$  bezüglich  $P$ . Allgemeiner kann man für eine Borel – messbare Funktion  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , den Erwartungswert definieren als:

$$E(f(X)) := \int_{\Omega} f(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dP_X(x).$$

**Definition 2.1.17.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein messbarer Raum,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Zufallsvariable und sei  $p \in [1, \infty)$  konstant. Dann definiert man die  $L^p$  – Norm von  $X$ ,  $\|X\|_p$ , durch:

$$\|X\|_p := \|X\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |X(\omega)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ist  $p = \infty$  setzt man

$$\|X\|_{\infty} := \|X\|_{L^{\infty}(\Omega)} := \inf \left\{ \sup_{\omega \in A} |X(\omega)| : A \in \mathcal{A}, P(A) = 1 \right\}.$$

Der zugehörige  $L^p$ –Raum für  $p \in [1, \infty]$  auf  $\Omega$  ist durch

$$L^p(\Omega) := \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : \|X\|_p < \infty\}$$

definiert.

**Bemerkung 2.1.18.** (i) Das Paar  $(L^p, \|X\|_p)$  ist für ein fixes  $p \in [0, \infty)$  ein Banachraum, dh. ein vollständiger normierter Vektorraum.

(ii) Für  $p = 2$  ist  $(L^2, \|X\|_2)$  sogar ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt

$$(X; Y)_{L^2(\omega)} := E[X \cdot Y].$$

**Bemerkung 2.1.19.** Nach der Definition des Lebesgue – Integrals ist der Erwartungswert ein linearer Operator, der folgende Eigenschaften hat: Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen, dann gilt:

(i) Linearität:  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$  für Konstanten  $a$  und  $b$ ;

(ii) Vergleichbarkeit: wenn  $X \leq Y$  dann gilt  $E(X) \leq E(Y)$ .

**Beweis.** Unmittelbar aus der Definition des Lebesgue – Integrals. □

**Definition 2.1.20.** Für zwei Zufallsvektoren  $X$  und  $Y$ ,  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert man die *Kovarianzmatrix*  $\text{Cov}[X, Y]$  von  $X$  und  $Y$  durch

$$\text{Cov}[X_i, Y_j] = E[X_i Y_j] - E[X_i] E[Y_j] \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

**Bemerkung 2.1.21.** (i) Für  $X = Y$  schreibt man  $\text{Cov}[X]$  statt  $\text{Cov}[X, X]$ .

(ii) Für eine reellwertige Zufallsvariable  $X$  ist die Kovarianz gleich der Varianz, dh.  $\text{Cov}[X] = \text{Var}[X] = E[(X - EX)^2]$ .

## 2. VORBEREITUNGEN

---

(iii) Ist  $\text{Cov}[X, Y] = 0$  so nennt man die zwei Zufallsgrößen unkorreliert.

**Definition 2.1.22.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $\mathcal{G}$  eine Unter- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{A}$  und  $X$  eine Zufallsvariable, die entweder nicht-negativ oder integrierbar ist. Der *bedingte Erwartungswert von  $X$  bei gegebenem  $\mathcal{G}$* , dh.  $E[X|\mathcal{G}]$ , ist jene Zufallsvariable, die folgende Bedingungen erfüllt:

- (i)  $E[X|\mathcal{G}]$  ist messbar bezüglich  $\mathcal{G}$ ;
- (ii)  $\int_G E[X|\mathcal{G}](\omega) dP(\omega) = \int_G X(\omega) dP(\omega) \quad \forall G \in \mathcal{G}$ .

Ist  $\mathcal{G}$  die von einer Zufallsvariablen  $Y$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(Y)$ , dann schreibt man  $E[X|Y]$  statt  $E[X|\sigma(Y)]$ .

**Bemerkung 2.1.23.** (i) Aus der zweiten Bedingung folgt, dass  $E[X|\mathcal{G}]$  ein Schätzer von  $X$  ist.

- (ii) Die Existenz von  $E[X|\mathcal{G}]$  garantiert der Satz von Radon – Nikodym (siehe [20, S. 98]).

Ähnlich zum Erwartungswert hat der bedingte Erwartungswert, unter anderem, folgende Eigenschaften.

**Satz 2.1.24.** (cf. [16, S. 69]) *Seien  $X, Y$  nicht-negative oder integrierbare Zufallsvariablen,  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $\mathcal{G}$  eine Unter- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{A}$ . Dann gilt mit Wahrscheinlichkeit 1:*

- (i) *Linearität:*  $E[aX + bY|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + bE[Y|\mathcal{G}]$  für Konstanten  $a$  und  $b$ ;
- (ii) *Unabhängigkeit:* wenn  $X$  integrierbar und unabhängig von  $\mathcal{G}$  ist, dann gilt:

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X];$$

- (iii) *Iterierte Bedingung:* Sei  $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ , dann gilt  $E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = E[X|\mathcal{G}_1]$ ;
- (iv) *Messbarkeit:* wenn  $X$  messbar bezüglich  $\mathcal{G}$  ist, dann gilt:  $E[X|\mathcal{G}] = X$ ;
- (v) *Vergleichbarkeit:* Wenn  $X \leq Y$ , dann gilt  $E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}]$ .

**Beweis.** (i) – (iii) siehe [16, S. 69ff]

(iv) – (v): siehe [8, S. 2]

□

Mit Hilfe des bedingten Erwartungswertes kann man nun auch die bedingte Wahrscheinlichkeit definieren.



**Definition 2.1.25.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$  eine Unter- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{A}$  und  $X$  ein Ereignis. Dann definiert man die *bedingte Wahrscheinlichkeit von  $X$*  bei gegebenem  $\mathcal{G}$ , dh.  $P(X|\mathcal{G})$ , durch:

$$P(X|\mathcal{G}) = E[1_X|\mathcal{G}]$$

wobei  $1_X$  die charakteristische Funktion auf  $X$  ist, dh.  $1_X = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \omega \in X \\ 0, & \text{wenn } \omega \notin X \end{cases}$ .

Betrachtet man nun  $P(X \in B|\mathcal{G}) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\}|\mathcal{G})$  für eine Zufallsgröße  $X$ , wobei  $B \in \mathcal{B}^n$ , dann gibt es eine Funktion  $p(\omega, B)$  die auf  $\Omega \times \mathcal{B}^n$  definiert ist mit folgenden Eigenschaften:

- (i) ist  $\omega \in \Omega$  fix, dann ist  $p(\omega, \cdot)$  eine Wahrscheinlichkeit,
- (ii) für fixes  $B \in \mathcal{B}^n$  ist  $p(\cdot, B)$  messbar bezüglich  $\mathcal{G}$  und es gilt für alle  $G \in \mathcal{G}$ :

$$P(G \cap [X \in B]) = \int_G p(\omega, B) dP(\omega),$$

man sagt  $p(\cdot, B)$  ist eine Version von  $P(X \in B|\mathcal{G})$ . Eine solche Funktion  $p$  ist bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmt und heißt *bedingte Verteilung von  $X$  bei gegebenem  $\mathcal{G}$* .

### 2.1.3 Konvergenz und Grenzwertsätze

In diesem Abschnitt werden die möglichen Arten der Konvergenz und die wichtigsten Grenzwertsätze wiederholt.

**Definition 2.1.26.** (cf. [20, S. 113]) Sei  $\{X_n(\omega)\}$  eine Folge von Zufallsvariablen und  $X(\omega)$  eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann definiert man:

- (i) die „fast sichere Konvergenz“ von  $X_n$  gegen  $X$  durch

$$P(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty) = 1. \quad (2.1.3)$$

Man sagt auch  $X_n$  „konvergiert mit Wahrscheinlichkeit 1“ gegen  $X$ .

- (ii) die „ $L^2$  – Konvergenz“ oder „Quadratmittelkonvergenz“ von  $X_n$  gegen  $X$  durch

$$\|X_n(\omega) - X(\omega)\|_2 = [E|X_n(\omega) - X(\omega)|^2]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (2.1.4)$$

- (iii) die „stochastische Konvergenz“ oder „Konvergenz in Wahrscheinlichkeit“ durch

$$P(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon) \rightarrow 0 \text{ für } \epsilon > 0 \text{ und } n \rightarrow \infty. \quad (2.1.5)$$

Im Folgenden wird für den stochastischen Grenzwert  $\text{st-lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = X$  geschrieben.

## 2. VORBEREITUNGEN

---

Nun, da man die drei Arten der Konvergenz definiert hat, interessiert man sich auch wie diese zusammenhängen. Es gilt folgendes (cf. [6, S. 15]):

$$\begin{array}{ccc} (2.1.3) & & (2.1.4) \\ & \Downarrow & \Updownarrow \\ & (2.1.5) & \end{array}$$

**Satz 2.1.27. (Dominierte Konvergenz)**(cf. [3, S. 40]) *Seien  $X_n, X$  und  $Y$  Zufallsvariablen auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  und sei  $\mathcal{G}$  eine Unter- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{A}$ . Wenn  $|X_n| \leq Y \ \forall n$ , wobei  $E(Y) < \infty$ , und  $X_n \rightarrow X$  mit Wahrscheinlichkeit 1, dann gilt:*

$$E[X_n | \mathcal{G}] \rightarrow E[X | \mathcal{G}] \text{ mit Wahrscheinlichkeit 1.}$$

In diesem Fall gilt sogar (cf. [6, S. 15]):

$$\begin{array}{ccc} (2.1.3) & \Rightarrow & (2.1.4) \\ & \Downarrow & \Updownarrow \\ & (2.1.5) & \end{array}$$

### 2.1.4 Stochastische Prozesse

**Definition 2.1.28.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $I$  eine beliebige Indexmenge. Eine Familie  $\{X_i, i \in I\}$  von  $\mathbb{R}^n$  – wertigen Zufallsgrößen nennt man einen *stochastischen Prozess* mit der Indexmenge (bzw. Parametermenge)  $I$  und Zustandsraum  $\mathbb{R}^n$ .

Im Folgenden wird für  $I$  ein Intervall  $[t_0, T]$  verwendet, wobei dieses als „Zeit“ interpretiert wird. Lässt man  $t \in [t_0, T]$  fix, so ist  $X_t(\cdot)$  eine  $\mathbb{R}^n$  – wertige Zufallsgröße. Dagegen ist für ein festes  $\omega \in \Omega$   $X(\omega)$  eine  $\mathbb{R}^n$  – wertige Funktion, die als Realisierung bzw. Pfad des stochastischen Prozesses bezeichnet wird.

**Definition 2.1.29.** Seien  $X_t$  und  $Y_t$  zwei stochastische Prozesse auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dann sind  $X_t$  und  $Y_t$  äquivalent, wenn für alle  $t \in [t_0, T]$  gilt, dass  $X(t, \cdot) = Y(t, \cdot)$  mit Wahrscheinlichkeit 1. Dh.  $X_t$  und  $Y_t$  unterscheiden sich nur um eine Menge vom Maß 0. Man bezeichnet dann  $X_t$  als eine *Version* von  $Y_t$  und umgekehrt.

**Bemerkung 2.1.30.** Ist  $X_t$  eine Version von  $Y_t$ , dann haben sie dieselbe Verteilungsfunktion.

Ist ein stochastischer Prozess  $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$  gegeben, so ist seine endlichdimensionale Verteilung  $F_t(x)$  bekannt:

$$\begin{aligned} F_t(x) &:= P[X_t \leq x] \\ F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) &:= P[X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2] \\ &\vdots \\ F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) &:= P[X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n] \end{aligned}$$

wobei  $t, t_i \in [t_0, T]$  und  $x, x_i \in \mathbb{R}^n$ .

Das System der Verteilungsfunktionen erfüllt zwei wichtige Eigenschaften:

- (i) Symmetrie: Sei  $\{p_1, \dots, p_n\}$  eine Permutation der Menge  $\{1, \dots, n\}$ . Dann gilt für beliebige Zeitpunkte und  $n \geq 1$ :

$$F_{t_{p_1}, \dots, t_{p_n}}(x_{p_1}, \dots, x_{p_n}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

- (ii) Verträglichkeit: Für  $t_{k+1}, \dots, t_n \in [t_0, T]$  mit  $k < n$  gilt:

$$F_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_k, \infty, \dots, \infty) = F_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k).$$

Die Frage ist nun, ob ein Prozess eine stetige Realisierung hat, wenn man seine endlichdimensionale Verteilungsfunktion gegeben hat. Diese wird durch das Kriterium von Kolmogorov beantwortet. Doch zunächst noch die Definition von stochastischer Stetigkeit.

**Definition 2.1.31.** (cf. [13, S. 4]) Sei  $X_t$  ein stochastischer Prozess und  $t, s \in [t_0, T]$  mit  $s < t$ . Dann heißt  $X_t$  *stochastisch stetig*, wenn für  $\epsilon$  beliebig und  $|t - s| \rightarrow 0$

$$P(\omega : |X(t, \omega) - X(s, \omega)| \geq \epsilon) \rightarrow 0.$$

Weiters heißt ein stochastischer Prozess  $X_t$  *stetig im Quadratmittel*, wenn für  $|t - s| \rightarrow 0$  gilt:

$$\|X_t - X_s\|_2^2 = E |X(t, \omega) - X(s, \omega)|^2 \rightarrow 0.$$

**Theorem 2.1.32. (Kriterium von Kolmogorov)**(cf. [1, S. 38]) Sei  $X_t$  ein stochastischer Prozess auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Wenn es für alle  $T > 0$  Konstanten  $a, b, c > 0$  gibt, sodass für alle  $s, t \in [t_0, T]$  gilt:

$$E|X_t - X_s|^a \leq c|t - s|^{1+b},$$

dann besitzt  $X_t$  mit Wahrscheinlichkeit 1 stetige Funktionen als Realisierungen.

**Beweis.** siehe [20, S. 60] □

**Definition 2.1.33.** (cf. [6, S. 22]) Sei  $X_t$  mit  $t \in I$  ein stochastischer Prozess auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Wenn es eine abzählbar dichte Teilmenge  $J$  von  $I$  gibt, sodass für jedes offene Intervall  $I_o$  und jedes abgeschlossene Intervall  $I_c$  gilt:

$$\{\omega : X(t, \omega) \in I_c \forall t \in I \cap I_o\} = \{\omega : X(t, \omega) \in I_c \forall t \in J \cap I_o\}$$

dann heißt  $X_t$  *separabel*.

**Definition 2.1.34.** (cf. [13, S. 4]) Sei  $X_t$  ein stochastischer Prozess. Dann ist  $X_t$  *messbar*, wenn die Funktion  $(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega)$   $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{A}$ -messbar ist.

Ein Resultat, das wir zu einem späteren Zeitpunkt benötigen, ist folgendes Theorem:

## 2. VORBEREITUNGEN

**Theorem 2.1.35.** (cf. [6, S. 23]) Sei  $X_t$  ein stochastischer Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit Indexmenge  $I = [t_0, T]$ . Wenn  $X_t$  stetig ist, dann ist  $X_t$  messbar und  $X_t$  ist separabel bezüglich jeder abzählbar dichten Teilmenge  $J$  von  $I$ .

**Definition 2.1.36.** Ein stochastischer Prozess heißt (strikt) stationär, wenn die zugehörigen endlichdimensionalen Verteilungen invariant gegen zeitliche Verschiebung sind, dh. wenn gilt:

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1+k, t_2+k, \dots, t_n+k}(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ für } t_i, t_i + k \in [t_0, T].$$

Ein stochastischer Prozess heißt stationär im weiteren Sinne, wenn  $X_t \in L^2(\Omega) \forall t$ . Man sagt auch  $X_t$  ist ein  $L^2$ -Prozess. Daraus folgt (cf. [6, S. 23]), dass  $EX_t = \mu = \text{konstant}$  und  $Cov(X_t, X_s) = C(t - s)$ , also eine Funktion in  $t - s$ , ist.

**Definition 2.1.37.** Ein  $\mathbb{R}^n$ -wertiger Gauß'scher stochastischer Prozess ist ein stochastischer Prozess, dessen endlichdimensionale Verteilungen Normalverteilungen sind.

**Bemerkung 2.1.38.** (i) Seien  $k$  Zeitpunkte  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq T$  gegeben. Ist ein stochastischer Prozess Gauß'sch, dann haben die Verteilungen von  $X_{t_1}, \dots, X_{t_k}$  die gemeinsame charakteristische Funktion:

$$\varphi_{t_1, \dots, t_k}(u_1, \dots, u_k) = \exp \left( i \sum_{j=1}^k u_j^t m(t_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k u_j^t c(t_j, t_l) u_l \right),$$

wobei  $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$  und  $u_i^t$  die transponierten Vektoren zu  $u_i$  sind. Außerdem ist  $m(t) = EX_t$  der Erwartungswert und  $c(t, s) = Cov(X_t, X_s)$  die Kovarianzmatrix. Die endlichdimensionalen Verteilungen eines Gauß'schen Prozesses sind also durch die ersten beiden Momente von  $X$  eindeutig bestimmt.

(ii) Für Gauß'sche Prozesse gilt: (strikt) stationär  $\Leftrightarrow$  stationär im weiteren Sinne.

### Markovprozesse

**Definition 2.1.39.** (cf. [1, S. 43f]) Ein stochastischer Prozess  $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$  auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  heißt Markovprozess, wenn er die Markov - Eigenschaft erfüllt:

für  $t_0 \leq s \leq t \leq T$  und alle  $B \in \mathcal{B}^n$  gilt mit Wahrscheinlichkeit 1

$$P(X_t \in B | \mathcal{A}([t_0, s])) = P(X_t \in B | X_s)$$

wobei  $\mathcal{A}([t_0, s]) = \mathcal{A}(X_h : t_0 \leq h \leq s)$ .

**Bemerkung 2.1.40.** Ein Markovprozess ist also ein stochastischer Prozess, bei dem die Vergangenheit irrelevant für die Zukunft ist, wenn man die Gegenwart kennt.

Nach Abschnitt 2.1.2 gibt es zu jedem Markovprozess  $X_t$  mit bedingter Wahrscheinlichkeit  $P(X_t \in B | X_s)$  eine bedingte Verteilung  $p(X_s, B) = P(s, X_s, t, B)$ . Diese Funktion hat vier Argumente:  $s, t \in [t_0, T]$ , wobei  $s \leq t$  ist,  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $B \in \mathcal{B}^n$  eine Borelmenge.  $P(s, X_s, t, B)$  hat folgende Eigenschaften (cf. [23, S. 52]):

- (i) Für fixes  $s, t$  und  $x$  ist  $P(s, x, t, \cdot)$  eine Wahrscheinlichkeit auf  $\mathcal{B}^n$ .
- (ii) Für fixes  $s, t$  und  $B$  ist  $P(s, \cdot, t, B)$  messbar bezüglich  $\mathcal{B}^n$ .
- (iii) Für fixes  $s, t, u$  und  $B$ , mit  $s \leq u \leq t$  gilt für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$P(s, x, t, B) = \int_{\mathbb{R}^n} P(u, y, t, B) P(s, x, u, dy),$$

die *Chapman – Kolmogorov – Gleichung*.

Man kann  $P(s, x, t, B)$  auch so anpassen, dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  die Chapman – Kolmogorov – Gleichung gilt, ohne die Eigenschaften (i) – (iii) zu beeinträchtigen.

Außerdem ist es immer möglich für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , alle  $s \in [t_0, T]$  und  $B \in \mathcal{B}^n$  die Chapman – Kolmogorov – Gleichung auf die Form

$$P(s, x, s, B) = 1_B(x) \quad (2.1.6)$$

zu bringen (cf. [1, S. 46]).

**Definition 2.1.41.** (cf. [1, S. 46]) Eine Funktion  $P(s, x, t, B)$  mit den Eigenschaften (i) – (iii) und (2.1.6) heißt *Übergangswahrscheinlichkeit*, wobei die Eigenschaft (iii) für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt.

Sei weiters  $X_t$  ein Markovprozess und  $P(s, x, t, B)$  eine Übergangswahrscheinlichkeit so dass  $P(s, x, t, B) = P(X_t \in B | X_s = x)$ , dann nennt man  $P(s, x, t, B)$  eine *Übergangswahrscheinlichkeit des Markovprozesses  $X_t$* . Diese ist für fixes  $s, t \in [t_0, T]$ , mit  $s \leq t$ , als eine Funktion von  $B$  und  $t$  fast sicher eindeutig bestimmt.

**Bemerkung 2.1.42.** Der Grund für die Wichtigkeit der Übergangswahrscheinlichkeit für Markovprozesse ist, dass man aus diesen Übergangswahrscheinlichkeiten und einer Anfangsverteilung zum Zeitpunkt  $t_0$  alle endlichdimensionalen Verteilungen des Prozesses erhält. Sei also  $X(t_0) = X_0$ . Wenn die Anfangsverteilung  $P_{X_0}(B) = P(X(t_0) \in B)$  gegeben ist, dann gilt für  $t_0 \leq t_1 < \dots < t_k < T$  und  $B_i \in \mathcal{B}^n$ :

$$P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_k} \in B_k) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_1} \dots \int_{B_{k-1}} P(t_{k-1}, x_{k-1}, t_k, B_k) \cdot \\ P(t_{k-2}, x_{k-2}, t_{k-1}, dx_{k-1}) \dots P(t_0, x_0, t_1, dx_1) \cdot P_{X(t_0)} dx_0.$$

**Definition 2.1.43.** (cf. [1, S. 48]) Sei  $X_t$  ein Markovprozess. Dann nennt man  $X_t$  einen *homogenen Markovprozess*, wenn die Übergangswahrscheinlichkeit stationär ist. Dh. für  $s, t \in [t_0, T]$  mit  $t_0 \leq s \leq t \leq T$  und  $t_0 \leq s+h \leq t+h \leq T$  ist folgende Gleichung erfüllt:

$$P(s+h, x, t+h, B) = P(s, x, t, B).$$

Man schreibt dann  $P(t-s, x, B) = P(s, x, t, B)$  mit  $0 \leq t-s \leq T-t_0$ , da die Übergangswahrscheinlichkeit nur von  $B, x$  und  $t-s$  abhängt.

**Definition 2.1.44.** Sei  $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  eine Zufallsvariable. Dann heißt  $\tau$  *Stoppzeit* von einem Markovprozess, wenn für alle  $t \in [0, \infty)$  gilt  $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}_t$ .

**Definition 2.1.45.** (cf. [15, S. 299]) Sei  $X_t$  ein homogener Markovprozess. Dann heißt  $X_t$  *starker Markovprozess*, wenn für jede endliche Stoppzeit  $\tau$  gilt:

$$P(X_{t+\tau} \in B | \mathcal{A}_{[t_0, \tau]}) = P(X_{t+\tau} \in B | X_\tau) \Leftrightarrow E(f(X_{t+\tau}) | \mathcal{A}_\tau) = \int P(t, X_\tau, dy) f(y),$$

wobei  $f$  eine beschränkte Borel – messbare Funktion ist.

### Diffusionsprozesse

**Definition 2.1.46.** (cf. [1, S. 55]) Sei  $X_t$  ein Markovprozess mit fast sicher stetigen Realisierungen und sei  $P(s, x, t, B)$  seine Übergangswahrscheinlichkeit. Dann heißt  $X_t$  *Diffusionsprozess*, wenn die Übergangswahrscheinlichkeit folgende Bedingungen für alle  $s \in [t_0, T)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\epsilon > 0$  erfüllt:

- (i)  $\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| > \epsilon} P(s, x, t, dy) = 0;$
- (ii)  $\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x) P(s, x, t, dy) = f(s, x);$  dabei ist  $f(s, x)$  eine wohldefinierte,  $\mathbb{R}^n$  – wertige Funktion, die als *Driftvektor* bezeichnet wird;
- (iii)  $\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)(y-x)^t P(s, x, t, dy) = G(s, x);$  dabei ist  $G(s, x)$  ebenfalls eine wohldefinierte,  $\mathbb{R}^{n \times n}$  – wertige Funktion, die als *Diffusionsmatrix* bezeichnet wird; sie ist nicht-negativ definit und symmetrisch.

**Bemerkung 2.1.47.** (i) Für zwei reellwertige Funktionen  $f$  und  $g$  definiert man

$$f \in O(g) \Leftrightarrow \limsup_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty.$$

Etwas verkürzt schreibt man  $f \in O(h)$  oder auch  $f = O(h)$ , wenn  $\limsup_{h \rightarrow \infty} \left| \frac{f(h)}{h} \right| < \infty$ .

(ii) Analog definiert man für zwei reellwertige Funktionen  $f$  und  $g$

$$f \in o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0.$$

Man schreibt auch  $f \in o(h)$  oder auch  $f = o(h)$ , wenn  $\lim_{h \rightarrow \infty} \left| \frac{f(h)}{h} \right| = 0$ .

**Bemerkung 2.1.48.**

$$\text{Definition 2.1.46(ii)} \stackrel{[6, \text{S. } 29]}{\Leftrightarrow} E_{s,x}(X_t - X_s) = E(X_t - X_s | X_s = x) = f(s, x)(t-s) + o(t-s)$$

$$\text{Definition 2.1.46(iii)} \stackrel{[6, \text{S. } 29]}{\Leftrightarrow} E_{s,x}([X_t - X_s][X_t - X_s]^t) = G(s, x)(t-s) + o(t-s).$$

### 2.1.5 Wiener Prozess/Brown'sche Bewegung

Um das weiße Rauschen bzw. stochastische Integrale definieren zu können, benötigt man noch den Begriff des Wiener Prozesses bzw. der Brown'schen Bewegung. Diese beschreibt die zufällige Bewegung eines Teilchens in einer Flüssigkeit oder einem Gas.

**Definition 2.1.49.** (cf. [4, S. 266]) Ein Familie von reellwertigen Zufallsvariablen  $\{X(t)\}$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , die auf dem Intervall  $T = [0, \infty)$  definiert ist, heißt *Brown'sche Bewegung* bzw. *Wiener Prozess* genau dann, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

- (i)  $X(t)$  ist homogen, dh.  $X(0) = 0$ ;
- (ii)  $X(t)$  hat unabhängige Zuwächse (bzw. Inkremente), dh.  $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n$  gilt, dass  $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  unabhängig sind;
- (iii)  $\forall s \geq 0, t \geq s : X(t) - X(s)$  ist normalverteilt mit  $\mu = 0$  und  $\sigma^2 = t - s$ .

Von nun an wird die Brown'sche Bewegung bzw. der Wiener Prozess mit  $B(t)$  bezeichnet.

Analog zur eindimensionalen Brown'schen Bewegung definiert man die mehrdimensionale Brown'sche Bewegung, die wesentlich für die Itô Formel bzw. deren Erweiterung auf den allgemeinen Fall ist.

**Definition 2.1.50.** (cf. [10, S. 90]) Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein stochastischer Prozess ist eine  $n$  – dimensionale Brown'sche Bewegung  $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n)$ , wenn er folgende Eigenschaften erfüllt:

- (i)  $B_t^i$  ist für alle  $i$  eine eindimensionale Brown'sche Bewegung,
- (ii)  $B_t^i$  und  $B_t^j$  sind für  $i \neq j$  unabhängig.

Hat man neben der Brown'schen Bewegung auch eine Filtration  $\{\mathcal{A}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$  gegeben, gilt analog zum eindimensionalen Fall folgendes:

- (i) für  $0 \leq s < t : \mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t$ ,
- (ii)  $\forall t \in \mathbb{R}^+ : B_t$  ist  $\mathcal{A}_t$  – messbar,
- (iii) für  $0 \leq s < t : B_t - B_s$  ist unabhängig von  $\mathcal{A}_t$ .

Um auf die Eigenschaften der Brown'schen Bewegung eingehen zu können, benötigt man noch den Begriff des Martingals.

**Definition 2.1.51.** Ein  $n$  – dimensionaler stochastischer Prozess  $\{X_t\}_{t \in [t_0, T]}$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ist ein *Martingal* bezüglich einer Filtration  $\{\mathcal{A}_t\}$  und bezüglich  $P$ , wenn :

- (i)  $X_t$  ist messbar bezüglich  $\mathcal{A}_t \forall t$ ,
- (ii)  $E[|X_t|] < \infty \forall t$ ,
- (iii)  $E[X_s | \mathcal{A}_t] = X_t \forall s \geq t$ .

**Bemerkung 2.1.52.** Gilt in (iii) nur  $E[X_s | \mathcal{A}_t] \leq X_t \forall s \geq t$ , dann ist  $X_t$  ein Supermartingal.

Um eine wichtige Eigenschaft der Brown'schen Bewegung beweisen zu können, benötigt man noch folgenden Satz.

## 2. VORBEREITUNGEN

**Satz 2.1.53.** (cf. [2, S. 348]) Sei  $X = (X_1, \dots, X_d)$  eine  $d$ -dimensionale Zufallsvariable, für die jede Komponente normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz  $\tau \in \mathbb{R}$  ist. Dann gibt es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine von  $n$  und  $d$  abhängige Konstante  $C_n$ , sodass

$$E[|X|^{2n}] = C_n \tau^n. \quad (2.1.7)$$

**Beweis.** Die Zufallsvariablen  $U_i := \tau^{-\frac{1}{2}} X_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , sind nach Voraussetzung unabhängig und standardnormalverteilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} E[|X|^{2n}] &= E[(X_1^2 + \dots + X_d^2)^n] = E\left[\tau^n \left(\left(\tau^{-\frac{1}{2}} X_1\right)^2 + \dots + \left(\tau^{-\frac{1}{2}} X_d\right)^2\right)^n\right] \\ &= E[(U_1^2 + \dots + U_d^2)^n] \tau^n. \end{aligned}$$

Multipliziert man diesen Ausdruck aus, erhält man mittels des Multinomialgesetzes eine Summe von Ausdrücken der Form  $c_{ij} U_i^{2n_1} U_j^{2n_2}$  mit  $c_{ij}$  konstant und  $n_1 + n_2 = n$ ,  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ . Weiters benutzt man, dass für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable  $U$  gilt, dass  $E[U^{2k}] = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ . Da die  $U_i$  unabhängig sind, berechnet man

$$E[c_{ij} U_i^{2n_1} U_j^{2n_2}] = c_{ij} E[U_i^{2n_1}] E[U_j^{2n_2}] = c_{ij} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n_1-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n_2-1) \in \mathbb{R}.$$

Somit definiert man  $C_n := E[(U_1^2 + \dots + U_d^2)^n] \in \mathbb{R}$ . □

**Bemerkung 2.1.54.** Für die Spezialfälle  $n = 1$  und  $n = 2$  kann  $C_n$  mittels der im Beweis errechneten Formeln direkt bestimmt werden.

$$\begin{aligned} E[|X|^2] &= E[U_1^2 + \dots + U_d^2] \tau = (1 + \dots + 1) \tau = d\tau. \\ E[|X|^4] &= E[(U_1^2 + \dots + U_d^2)^2] \tau^2 = \sum_{i=1}^d \left( E[U_i^4] + \sum_{j=1, j \neq i}^d E[U_i^2] E[U_j^2] \right) \tau^2 \\ &= \sum_{i=1}^d \left( 3 + \sum_{j=1, j \neq i}^d 1 \cdot 1 \right) \tau^2 = \sum_{i=1}^d (3 + (d-1)) \tau^2 = d(d+2) \tau^2. \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.1.55.** Einige wichtige Eigenschaften der Brown'schen Bewegung sind:

- (i) Die Brown'sche Bewegung  $B_t$  ist nicht eindeutig bestimmt (cf. [14, S. 12]).
- (ii) Die Brown'sche Bewegung  $B_t$  ist auf fast allen Pfaden stetig.

**Beweis.** Nach 2.1.54 gilt für die Brown'sche Bewegung:  $E(|B_t - B_s|^4) = n(n+2)(t-s)^2$ . Somit erfüllt die Brown'sche Bewegung das Kriterium von Kolmogorov mit  $a = 4$ ,  $c = n(n+2)$  und  $b = 1$  und hat daher eine stetige Funktion als Realisierung. □

- (iii) Die Brown'sche Bewegung  $B_t$  ist ein Gauß Prozess.



**Beweis.** siehe [14, S. 13] □

- (iv) Die  $n$  – dimensionale Brown'sche Bewegung  $B_t$  ist ein (starker) Markovprozess mit stationärer Übergangswahrscheinlichkeit für  $t > 0$

$$P(t, x, B) = P(X_{t+s} \in B | W_s = x) = \int_B (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y-x|^2}{2t}} dy.$$

**Beweis.** siehe [16, S. 107] □

- (v) Die Brown'sche Bewegung  $B_t$  mit zugehöriger Filtration  $\{\mathcal{A}_t\}$  ist ein Martingal bezüglich  $\mathcal{A}_t$ .

**Beweis.** •  $B_t$  ist messbar bezüglich einer Filtration  $\mathcal{A}_t \forall t$ : Da  $B_t$  nach dem Kriterium von Kolmogorov eine stetige Version hat, folgt nach Theorem 2.1.35 die Messbarkeit von  $B_t$  bezüglich  $\mathcal{A}_t$ .

- $E[|B_t|] < \infty \forall t$ : gilt nach Definition (ii).
- $E[B_s | \mathcal{A}_t] = B_t \forall s \geq t$ : Sei  $0 \leq t \leq s$  gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} E[B_s | \mathcal{F}_t] &= E[(B_s - B_t) + B_t | \mathcal{A}_t] \\ &\stackrel{\text{Lin. bed. EW}}{=} E[B_s - B_t | \mathcal{A}_t] + E[B_t | \mathcal{A}_t] \\ &\stackrel{B_t \mathcal{A}_t\text{-messbar}}{=} E[B_s - B_t | \mathcal{A}_t] + B_t \\ &\stackrel{B_s - B_t \text{ unabh. von } \mathcal{A}_t}{=} E[B_s - B_t] + B_t \\ &\stackrel{\text{Definition (iii)}}{=} B_t. \end{aligned}$$

□

**Definition 2.1.56.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  wobei  $I = [t_0, T] \in \mathbb{R}^+$ . Dann heißt  $f$  *hölderstetig der Ordnung*  $\gamma > 0$ , wenn es eine Konstante  $c$  gibt, sodass gilt:

$$|f(t) - f(s)| \leq c |t - s|^\gamma \quad \forall t_0 < s < t < T.$$

**Satz 2.1.57.** Sei  $B_t$  eine  $n$  – dimensionale Brown'sche Bewegung. Dann ist die Abbildung  $t \mapsto B_t(\omega)$  für fast alle  $\omega \in \Omega$  nirgends hölderstetig der Ordnung  $\gamma > \frac{1}{2}$ . Für  $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$  ist die Abbildung hölderstetig.

**Beweis.** siehe [2, S. 421] und [17, S. 63] □

Für  $\gamma = \frac{1}{2}$  gilt folgender Satz:

**Satz 2.1.58. (Lévy's Modus der Stetigkeit)**(cf. [17, S. 65]) Sei  $m(\epsilon)$  gegeben durch

$$m(\epsilon) = \sup |B_t - B_s| \text{ mit } 0 < s < t \leq 1, |s - t| \leq \epsilon. \quad (2.1.8)$$

Dann gilt

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{m(\epsilon)}{\sqrt{2\epsilon \log \frac{1}{\epsilon}}} = 1 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1.$$

## 2. VORBEREITUNGEN

---

Nach Bemerkung 2.1.55(ii) sind fast alle Realisierungen der Brown'sche Bewegung  $B_t$  stetig, aber nach dem folgenden Satz von Wiener nicht differenzierbar.

**Satz 2.1.59. (Paley – Wiener – Zygmund)**(cf. [24, S. 110]) Sei  $B_t$  für  $t \geq 0$  eine  $n$  – dimensionale Brown'sche Bewegung. Dann ist mit Wahrscheinlichkeit 1 jeder Pfad  $t \mapsto B_t(\omega)$  nirgends differenzierbar.

**Beweis.** siehe [11, S. 9] □

Zuletzt definiert man noch die quadratische Variation eines Prozesses.

**Definition 2.1.60.** (cf. [24, S. 32]) Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetiger stochastischer Prozess. Dann definiert man für  $p > 0$  den  $p$  – ten Variationsprozess,  $\langle X, X \rangle_t^{(p)}$ , von  $X_t$  durch

$$\langle X, X \rangle_t^{(p)}(\omega) := \text{st-lim}_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |X_{t_{i+1}}(\omega) - X_{t_i}(\omega)|^p,$$

wobei  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  und  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ .

**Bemerkung 2.1.61.** (i) Ist  $p = 1$  nennt man den Prozess totale Variation.

(ii) Für  $p = 2$  nennt man den Prozess auch quadratische Variation.

(iii) Mit Hilfe der quadratischen Variation charakterisiert man stochastische Prozesse. Man unterscheidet Prozesse mit endlicher (etwa der Poissonprozess [siehe [15, S. 13]]) und Prozesse mit unendlicher Variation (zum Beispiel die Brown'sche Bewegung [siehe unten]).

(iv) Für die Brown'sche Bewegung  $B_t (\in \mathbb{R})$  ist der quadratische Variationsprozess fast sicher definiert durch

$$\langle B, B \rangle_t^{(2)}(\omega) := t.$$

**Beweis.** Sei  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  und sei  $Y(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$ .

Z. z.:  $Y(t, \omega) \rightarrow t$  in  $L^2(\Omega)$  für  $M := \max_{i=0, \dots, n-1} (t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0$ .

1.Schritt:  $E[Y(t, \omega)] = t$

$$E[Y(t, \omega)] = E \left[ \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] \stackrel{\text{Lin. des EW}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} E \left[ (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right]$$

Für die Brown'sche Bewegung mit  $X = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$  gilt:

$$E[X^2] = E[X^2] - \underbrace{EX}_{=0 \text{ (Def. } B_t)}} \cdot \underbrace{EX}_{=0} = E[(X - EX)^2] = \text{Var}[X].$$

Daher folgt

$$E \left[ (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] = \text{Var} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \stackrel{\text{BB ist } N(0, t-s) \text{ - verteilt}}{=} t_{i+1} - t_i$$

Insgesamt erhält man also:

$$E[Y(t, \omega)] = \sum_{i=0}^{n-1} E \left[ (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \stackrel{\text{Teleskopsumme}}{=} t_n - t_0 = t - 0 = t.$$

2.Schritt:  $\text{Var}[Y(t, \omega)] = 0$

Da  $\text{Var}(X) = E[(X - EX)^2]$  gilt und das vierte Moment einer normalverteilten Zufallsvariablen  $E[|X|^4] = 3 \cdot \sigma^2$  ist (cf. [7, S. 37]) folgt:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[ (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] &= E \left[ \left( (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \underbrace{E \left[ (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right]}_{t_{i+1} - t_i} \right)^2 \right] \\ &= E \left[ (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^4 \right] - 2(t_{i+1} - t_i) E \left[ (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] + \\ &\quad \underbrace{3(t_{i+1} - t_i)^2}_{(t_{i+1} - t_i)^2} \\ &= 2(t_{i+1} - t_i)^2 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y(t, \omega)] &= \text{Var} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \text{Var} \left[ (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2(t_{i+1} - t_i)^2 \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2M \cdot (t_{i+1} - t_i) \stackrel{\text{Teleskopsumme}}{=} 2tM \end{aligned}$$

Da  $M \rightarrow 0$  gehen soll, gilt  $\text{Var}[Y(t, \omega)] = 0$  in  $L^2(\Omega)$ .  $\square$

Mit Hilfe der quadratischen Variation für die Brown'sche Bewegung kann man folgenden Satz zeigen.

### Satz 2.1.62.

Die Brown'sche Bewegung ist auf jedem Intervall von unbeschränkter Schwankung, dh. die totale Variation ist  $\infty$ .

**Beweis.** siehe [15, S. 19]  $\square$

## 2.1.6 Weißes Rauschen

Das weiße Rauschen ist, wie in Kapitel 1 schon angedeutet wurde, ein Modell für einen Zufallsprozess, dessen Zufallsvariablen normalverteilt sind. Daher ist es eine gute Idealisierung von stochastischen Ereignissen. Das weiße Rauschen ist in der Anwendung als ein

## 2. VORBEREITUNGEN

---

stationärer Gauß – Prozess  $W(t)$  für  $-\infty < t < \infty$  mit Erwartungswert  $E[W(t)] = 0$  und einer konstanten Spektraldichtefunktion  $f(\lambda)$  auf der gesamten reellen Achse bekannt. Dh. wenn  $c(t) = E(W(s)W(t+s))$  die Kovarianz ist, so gilt (cf. [1, S. 65ff]):

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} c(t) dt = \frac{k}{2\pi} \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und eine Konstante } k.$$

Da die Frequenzen überall mit gleicher Intensität auftreten, hat das weiße Rauschen ein „weißes“ Spektrum und daher auch den Namen. Dann müsste aber  $c(t)$  die Dirac – Delta – Funktion sein, dh.  $c(t) = \delta_t$ . Also ist der Prozess für verschiedene  $s$  und  $t$  unkorreliert und da das weiße Rauschen ein Gauß Prozess ist, sind sie auch unabhängig. Insbesondere wäre

$$c(0) = EW_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda = \infty.$$

Dieser Prozess kann also im herkömmlichen Sinn nicht realisiert werden. Man versucht daher das weiße Rauschen als Ableitung eines gewöhnlichen stochastischen Prozesses, der Brown'schen Bewegung, zu identifizieren. Mit Hilfe der Theorie der verallgemeinerten Funktionen (*Distributionen*) könnte dieses Problem behoben werden, da es dort zu jeder Distribution eine Ableitung beliebiger Ordnung gibt, die ebenfalls wieder eine Distribution ist. Dies geht jedoch über das Ziel dieser Diplomarbeit hinaus und daher sei, für genauere Ausführungen, auf [1, S. 66ff] verwiesen.

Man identifiziert also das weiße Rauschen  $W_t$  formal als Ableitung des Wiener Prozesses  $B_t$ , dh.  $W_t = B'_t \Leftrightarrow B_t = \int_{t_0}^t W_s ds$ .

## 2.2 Itô Integrale

### 2.2.1 Einleitung

Da nun Zufälligkeiten bei den Differentialgleichungen berücksichtigt werden, wird auch die Lösung etwas komplizierter, da diese ein stochastischer Prozess ist, und daher in der Zeitvariable  $t$  über Familien von Funktionen integriert wird. Außerdem ist die stückweise Struktur der zufälligen Eingabegrößen nicht integrierbar und es ist auch nicht möglich die stochastische Differentialgleichung als gewöhnliche Differentialgleichung auf jedem Pfad aufzufassen.

Betrachtet wird eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$X'_t = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \text{„Störung“},$$

wobei  $b(\cdot, \cdot) : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\sigma(\cdot, \cdot) : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  messbare Funktionen sind und angenommen wird, dass die Störung durch das weiße Rauschen beschrieben wird. Da dieses aber kein gewöhnlicher stochastischer Prozess ist (cf. Abschnitt 2.1.6), versucht man einen stochastischen Prozess  $W_t$  zu finden, sodass die Differentialgleichung wie folgt geschrieben werden kann:

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot W_t. \quad (2.2.1)$$

Nach Abschnitt 2.1.6 kann das unbestimmte Integral über das weiße Rauschen mit einem  $m$  – dimensionalen Wiener Prozess identifiziert werden, dh.

$$B_t = \int_{t_0}^t W_s ds \text{ bzw. } dB_t = W_t \cdot dt.$$

Daher lautet die stochastische Differentialgleichung dann:

$$dX = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) \cdot dB_t. \quad (2.2.2)$$

Um die stochastische Differentialgleichung (2.2.2) zu lösen wandelt man sie in die Integralgleichung

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^t b(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s)W_s ds$$

um, wobei  $X_0 = X(t_0)$ .

Das linke Integral ist dabei ein gewöhnliches Riemann – Integral, aber das rechte Integral kann nicht als Riemann – Stieltjes – Integral aufgefasst werden, da fast alle Realisierungen von  $W_t$  nicht von beschränkter Schwankung sind. Setzt man nun, wie zuvor,  $dB_s = W_s ds$ , erhält man

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^t b(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Das Ziel der nächsten Abschnitte ist es, dieses rechte Integral für eine möglichst große Klasse von Funktionen zu definieren.

## 2.2.2 Definition des stochastischen Integrals

Ziel dieses Abschnittes ist die Definition des Integrals  $\int_S^T f(t, \omega)dB_t(\omega)$  für ein gegebenes  $f(t, \omega)$  und  $0 \leq S < T$ . Dazu beginnt man mit der Definition für einfache Funktionen, wie etwa Treppenfunktionen, mit deren Hilfe dann andere Funktionen approximiert werden. Man kann also eine beliebige Funktion  $f$  mit Treppenfunktionen der Form  $\sum_i f(t_i^*, \omega) \cdot 1_{[t_i, t_{i+1})}(t)$  approximieren, wobei  $t_i^* \in [t_i, t_{i+1})$  und  $[t_i, t_{i+1})$  eine Partion des Intervalls  $[t_0, T]$  ist. Hierbei ist es entscheidend, wie man  $t_i^*$  wählt. Diese zwei Möglichkeiten sind die gebräuchlichsten:

- (i)  $t_i^* = t_i$ , dh. die linke Grenze des Intervalls. Diese Annahme führt auf das Itô – Integral  $\int_S^T f(t, \omega)dB_t(\omega)$ .
- (ii)  $t_i^* = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$ , dh. der Mittelpunkt des Intervalls. Diese Wahl führt zu dem Stratonovich – Integral  $\int_S^T f(t, \omega) \circ dB_t(\omega)$ .

In dieser Diplomarbeit wird in Folge das Itô – Integral verwendet, da es ein (lokales) Martingal ist und somit rechnerische Vorteile bringt.

Von nun an sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Maßraum.

## 2. VORBEREITUNGEN

---

**Definition 2.2.1.** (cf. [14, S. 25]) Sei  $B_t(\omega)$  eine  $n$  – dimensionale Brown'sche Bewegung. Dann definiert man  $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_t^{(n)}$  als die  $\sigma$ -Algebra, die von den Zufallsvariablen

$$\{B_i(s)\}_{1 \leq i \leq n, 0 \leq s \leq t}$$

erzeugt wird.

**Bemerkung 2.2.2.** (i)  $\mathcal{A}_t$  ist also die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die alle Mengen der Form

$$\{\omega, B_{t_1}(\omega) \in \mathcal{A}_1, \dots, B_{t_k}(\omega) \in \mathcal{A}_k\}$$

enthält, wobei für  $i \leq k = 1, 2, \dots, t_i \leq t$  und  $\mathcal{A}_i \subset \mathbb{R}^n$  Borelmengen sind.

(ii)  $\mathcal{A}_t$  enthält alle Informationen von  $B_s$  bis zum Zeitpunkt  $t$ .

(iii)  $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t$  für  $s < t$  und  $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{A} \forall t$ .

**Definition 2.2.3.** Sei  $g(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stochastischer Prozess und  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$  eine Filtration. Ein stochastischer Prozess  $g(t, \omega)$  heißt *adaptiert bezüglich einer Filtration*  $\mathcal{F}$ , wenn für alle  $t \geq 0$  gilt: die Abbildung  $\omega \rightarrow g(t, \omega)$  ist messbar bezüglich  $\mathcal{F}$ .

Zunächst betrachtet man die folgende Klasse von Funktionen.

**Definition 2.2.4.** (cf. [14, S. 25]) Sei  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S, T)$  die Klasse von Funktionen  $f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

(i)  $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$  ist messbar bezüglich  $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$ , wobei  $\mathcal{B}$  die Borel- $\sigma$ -Algebra auf  $[0, \infty)$  ist;

(ii)  $f(t, \omega)$  ist  $\mathcal{A}_t$  – adaptiert;

(iii)  $E \left[ \int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty$ , dh.  $f \in L^2([S, T] \times \Omega)$ .

Nun zur Definition des Itô – Integrals. Wie zu Beginn des Abschnittes angeführt, startet man mit der Definition für elementare Funktionen.

**Definition 2.2.5.** (cf. [5, S. 65]) Sei  $0 \leq S < T < \infty$ . Eine Funktion  $\phi \in \mathcal{V}$  heißt *elementar* oder *Treppenfunktion*, wenn sie für  $S = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  von der Form

$$\phi(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i(\omega) \cdot 1_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

ist, wobei  $e_i$  nach Definition von  $\mathcal{V}$  messbar sind. Für diese Funktionen ist das Integral definiert durch

$$\mathcal{I}[\phi](\omega) := \int_S^T \phi(t, \omega) dB_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i(\omega) \cdot [B_{t_{i+1}} - B_{t_i}](\omega), \quad (2.2.3)$$

wobei  $[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}](\omega)$  die Zuwächse von  $B_t$  sind.

**Korollar 2.2.6. (Itô Isometrie)**(cf. [17, S. 80]) Sei  $\phi$  eine beschränkte, elementare Funktion. Dann gilt:

$$E \left| \left( \int_S^T \phi(t, \omega) dB_t \right)^2 \right| = E \left( \int_S^T |\phi(t, \omega)|^2 dt \right).$$

**Beweis.** siehe [17, S. 80] □

**Bemerkung 2.2.7.** Nun da das stochastische Integral für elementare Funktionen definiert ist, können wir einige wichtige Eigenschaften festhalten, die unmittelbar aus der Definition des Integrals folgen:

- $\int_S^T h dB_t = \int_S^U h dB_t + \int_U^T h dB_t$  für jede elementare Funktion  $h$ .
- $\int_S^T (a \cdot h_1 + b \cdot h_2) dB_t = a \int_S^T h_1 dB_t + b \int_S^T h_2 dB_t$  für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $h_1, h_2$  elementare Funktionen.
- Für eine elementare Funktion  $h$  mit  $E |h(s)| < \infty$  und  $S \leq t \leq T$  gilt:

$$E \left( \int_S^T h dB_t \right) = 0,$$

dh. das stochastische Integral hat den Erwartungswert 0.

- $\int_S^T h dB_t$  ist messbar für jede elementare Funktion  $h$ .

Eine weitere wichtige Eigenschaft, weswegen in dieser Diplomarbeit das Itô – Integral verwendet wird und nicht das stochastische Integral von Stratonovich, ist folgende:

**Satz 2.2.8.** Das Itô – Integral wie in (2.2.3) ist ein Martingal bezüglich  $\mathcal{A}_t$ .

**Beweis.** Sei  $S \leq t < s \leq T$  und  $\phi$  eine elementare Funktion. O. B. d. A. ist  $S = 0$ .

$$\begin{aligned} E [\mathcal{I}[\phi](\omega) | \mathcal{A}_t] &= E \left[ \int_0^s \phi(s, \omega) dB_s(\omega) \middle| \mathcal{A}_t \right] \\ &= E \left[ \int_0^t \phi(s, \omega) dB_s(\omega) \middle| \mathcal{A}_t \right] + E \left[ \int_t^s \phi(s, \omega) dB_s(\omega) \middle| \mathcal{A}_t \right] \\ &\stackrel{\phi \text{ messbar bzgl. } \mathcal{A}_t}{=} \int_0^t \phi(s, \omega) dB_s(\omega) + E \left[ \sum_{t \leq t_i \leq t_{i+1} \leq s} e_i(\omega) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) (\omega) \middle| \mathcal{A}_t \right]. \end{aligned}$$

Nun muss man noch den zweiten Summanden berechnen:

$$\begin{aligned}
E \left[ \sum_{t \leq t_i \leq t_{i+1} \leq s} e_i \cdot (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \middle| \mathcal{A}_t \right] &\stackrel{\text{Lin. bed. EW}}{=} \sum_{t \leq t_i \leq t_{i+1} \leq s} E \left[ e_i \cdot (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \middle| \mathcal{A}_t \right] \\
&\stackrel{\text{Iter. Bed.}}{=} \sum_{t \leq t_i \leq t_{i+1} \leq s} E \left[ E[e_i \cdot (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) | \mathcal{A}_{t_i}] \middle| \mathcal{A}_t \right] \\
&= \sum_{t \leq t_i \leq t_{i+1} \leq s} E \left[ e_i \cdot E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) | \mathcal{A}_{t_i}] \middle| \mathcal{A}_t \right] \\
&\stackrel{\text{Lin. bed. EW}}{=} \sum_{t \leq t_i \leq t_{i+1} \leq s} E \left[ e_i \cdot \left( E[B_{t_{i+1}} | \mathcal{A}_{t_i}] - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. E[B_{t_i} | \mathcal{A}_{t_i}] \right) \middle| \mathcal{A}_t \right] \\
&\stackrel{B_t \text{ ist Martingal}}{=} \sum_{t \leq t_i \leq t_{i+1} \leq s} E \left[ e_i \cdot (B_{t_i} - B_{t_i}) \middle| \mathcal{A}_t \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also:

$$E[\mathcal{I}[\phi](\omega) | \mathcal{A}_t] = \int_0^t \phi dB + 0 = \int_0^t \phi dB.$$

□

Die Itô – Isometrie ist wesentlich um das Integral von elementaren Funktionen auf Funktionen in  $\mathcal{V}$  zu erweitern.

Zunächst sei  $h \in \mathcal{V}$  beschränkt und  $h(\cdot, \omega)$  stetig für jedes  $\omega$ . Dann gibt es elementare Funktionen  $\phi_n \in \mathcal{V}$  sodass  $E \left[ \int_S^T (h - \phi_n)^2 dt \right] \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , dh.  $\|h - \phi_n\|_{L^2([S, T] \times \Omega)} \rightarrow 0$  (cf. [14, S. 27]).

Sei nun  $g \in \mathcal{V}$  beschränkt. Dann gibt es Funktionen  $h_n \in \mathcal{V}$  sodass  $h_n \in \mathcal{V}$  stetig ist für alle  $\omega$  und  $n$  und es gilt  $E \left[ \int_S^T (g - h_n)^2 dt \right] \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , dh.  $\|g - h_n\|_{L^2([S, T] \times \Omega)} \rightarrow 0$  (cf. [14, S. 27]).

Nun sei  $f \in \mathcal{V}$ . Dann gibt es eine Folge  $\{g_n\} \subset \mathcal{V}$ , sodass  $g_n$  beschränkt ist für alle  $n$  und  $E \left[ \int_S^T (f - g_n)^2 dt \right] \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , dh.  $\|f - g_n\|_{L^2([S, T] \times \Omega)} \rightarrow 0$  (cf. [14, S. 28]).

Zusammengefasst gilt also folgendes:

**Satz 2.2.9.** (cf. [13, S. 60]) *Für  $f \in \mathcal{V}$  gibt es eine Folge von Treppenfunktionen  $f_n$ , sodass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \int_S^T (f - f_n)^2 dt \right] = 0 \text{ in } L^2([S, T] \times \Omega).$$

**Beweis.** siehe [13, S. 60]

□



Somit kann man das Itô – Integral für beliebige Funktionen in  $\mathcal{V}$  definieren.

**Definition 2.2.10.** (Itô – Integral)(cf. [5, S. 69]) Sei  $f \in \mathcal{V}$  beliebig und  $f_n$  eine Folge von elementaren Funktionen, sodass  $E \left[ \int_S^T (f - f_n)^2 dt \right] \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  in  $L^2([S, T] \times \Omega)$ . Dann definiert man das *Itô – Integral* als den Grenzwert:

$$\mathcal{I}[f](\omega) := \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T f_n(t, \omega) dB_t(\omega)$$

wobei der Grenzwert bezüglich der  $L^2([S, T] \times \Omega)$  – Norm ist.

**Korollar 2.2.11. (Itô Isometrie)**(cf. [17, S. 82]) Sei  $f \in \mathcal{V}(S, T)$  beliebig. Dann gilt:

$$E \left| \left( \int_S^T f(t, \omega) dB_t \right)^2 \right| = E \left( \int_S^T |f(t, \omega)|^2 dt \right). \quad (2.2.4)$$

**Beweis.** siehe [17, S. 82] □

### 2.2.3 Eigenschaften des stochastischen Integrals

Nun da das stochastische Integral definiert ist, werden einige wichtige Eigenschaften zusammengefasst. Von nun an sei o. B. d. A.  $S = 0$ .

**Satz 2.2.12.** Seien  $f, g \in \mathcal{V}(0, T)$  und  $0 \leq S < U < T < \infty$ . Dann gilt:

- (i)  $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$ ;
- (ii)  $\int_S^T f dB_t$  ist messbar;
- (iii)  $\int_S^T (a \cdot f + b \cdot g) dB_t = a \int_S^T f dB_t + b \int_S^T g dB_t$  für  $a, b \in \mathbb{R}$ , dh. das stochastische Integral ist ein linearer Operator;
- (iv) wenn  $E |f| < \infty$  gilt:  $E \left( \int_S^T f dB_t \right) = 0$ .

**Beweis.** (i) und (ii) siehe [14, S. 30]

(iii) und (iv) siehe [1, S. 87] □

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die folgende:

**Satz 2.2.13.** Das Itô – Integral wie in Definition 2.2.10 ist ein Martingal bezüglich  $\mathcal{A}_t$ .

**Beweis.** Analog zum Beweis für Treppenfunktionen. □

**Theorem 2.2.14. (Doob'sche Martingale – Ungleichung)**(cf. [22, S. 15]) Sei  $X_t$  ein Martingal, sodass die Abbildung  $t \rightarrow X_t(\omega)$  fast sicher stetig ist. Dann gilt  $\forall p \geq 1, T \geq 0$  und  $\forall \lambda > 0$ :

$$P \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t| \geq \lambda \right] \leq \frac{1}{\lambda^p} E [|X_t|^p]$$

**Beweis.** siehe [22, S. 15] □

**Theorem 2.2.15.** (cf. [14, S. 32]) Sei  $f \in \mathcal{V}(0, T)$ . Dann gibt es eine  $t$  – stetige Version von

$$\int_0^t f(s, \omega) dB_s(\omega) \text{ für } 0 \leq t \leq T,$$

dh. es gibt einen stochastischen Prozess  $Y_t$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , sodass

$$P\left(Y_t = \int_0^t f dB\right) = 1 \quad \forall t, 0 \leq t \leq T.$$

**Beweis.** siehe [14, S. 32] □

Mit Hilfe dieser zwei Theoreme und der Itô Isometrie kann man sofort zeigen:

**Theorem 2.2.16.** Sei  $f(t, \omega) \in \mathcal{V}(0, T) \quad \forall T$ . Dann ist

$$X_t = \int_0^t f(s, \omega) dB_s(\omega)$$

ein Martingal bezüglich  $\mathcal{A}_t$  und es gilt für  $\lambda, T > 0$

$$P\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^2} E\left[\int_0^t f(s, \omega)^2 ds\right]. \quad (2.2.5)$$

### 2.2.4 Erweiterungen des Itô – Integrals

Nun da das stochastische Integral auf  $\mathcal{V}$  definiert ist, versucht man das Integral auf eine größere Klasse von Funktionen auszuweiten. Dies ist bei Itô's Integral  $\int f dB_s$  möglich, indem man zunächst die Bedingung (ii) in Definition 2.2.4 abschwächt. Anstatt zu fordern, dass  $f(t, \omega) \mathcal{A}_t$  – adaptiert ist, fordert man nun die schwächere Bedingung:

(ii)\*: Es gibt eine Filtration  $\mathcal{F}_t$  für  $t \geq 0$ , sodass:

- die Brown'sche Bewegung  $B_t$  ein Martingal bezüglich  $\mathcal{F}_t$  ist;
- $f(t, \omega)$  ist adaptiert bezüglich  $\mathcal{F}_t$ .

Man lässt also mehr Funktionen  $f$  zu, solange die Brown'sche Bewegung ein Martingal bleibt. Es gilt also  $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{F}_t$ .

Ist nun (ii)\* erfüllt, folgt dass  $E[B_s - B_t | \mathcal{F}_t] = 0 \quad \forall s > t$  und das Itô – Integral kann wie in Abschnitt 2.2.2 definiert werden.

Die Abschwächung der Definition gestattet nun das Itô – Integral von zwei unabhängigen Wiener Prozessen  $B_t^1$  und  $B_t^2$  zu betrachten. Es ist also möglich das mehrdimensionale Itô – Integral zu definieren.

**Definition 2.2.17.** Sei  $B = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^n)$  die  $n$  – dimensionale Brown'sche Bewegung und  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$  eine Filtration. Dann definiert man  $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}^{m \times n}(S, T)$  als die Klasse der  $m \times n$  – Matrizen  $f = (f_{ij}(t, \omega))$ , wobei alle  $f_{ij}$  die Bedingungen (i) und (iii) aus Definition 2.2.4 und (ii)\* bezüglich der Filtration  $\mathcal{F}$  erfüllen.

Für stochastische Prozesse  $f \in \mathcal{V}_{\mathcal{F}}^{m \times n}(S, T)$  definiert man das *mehrdimensionale Itô – Integral* als

$$\int_S^T f dB_s = \int_S^T \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m,1} & \cdots & f_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1 \\ \vdots \\ dB_n \end{pmatrix},$$

wobei die  $i$  – te Komponente die Summe des erweiterten Itô – Integrals  $\sum_{j=1}^n \int_S^T f_{ij}(s, \omega) dB_j$  ist.

Nun schwächt man auch noch (iii) ab, dh. statt  $E \left[ \int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty$  wird nur

(iii)\*:  $P \left( \int_S^T f(t, \omega)^2 dt < \infty \right) = 1$   
verlangt.

**Definition 2.2.18.** Man definiert  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}(S, T)$  als die Klasse von Funktionen  $f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die (i) (aus Definition 2.2.4), (ii)\* und (iii)\* erfüllen.

**Bemerkung 2.2.19.** (i) Wenn  $\mathcal{F} = \mathcal{A}^{(n)} = \{\mathcal{A}_t^{(n)}\}$  für  $t \geq 0$  ist, dann schreibt man  $\mathcal{W}(S, T)$  statt  $\mathcal{W}_{\mathcal{A}^{(n)}}(S, T)$ .

(ii) Wie bei dem Itô – Integral in  $\mathcal{V}$  kann man zeigen, dass es für  $f \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  für alle  $t$  eine Folge von Treppenfunktionen  $f_n \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  gibt, sodass  $\int_0^t |f_n - f|^2 ds \rightarrow 0$ , wobei der stochastische Grenzwert verwendet wird.

Es gilt also:

**Definition 2.2.20.** (cf. [5, S. 80]) Sei  $f \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  und  $f_n \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  eine Folge mit  $\int |f - f_n|^2 ds \rightarrow 0$ . Dann definiert man durch

$$\int_S^T f(s, \omega) dB_s(\omega) := \text{st-lim}_{n \rightarrow \infty} \int_S^T f_n(s, \omega) dB_s(\omega)$$

das *stochastische Integral* von  $f$ .

**Definition 2.2.21.** Sei  $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  eine Zufallsvariable. Dann heißt  $\tau$  *Stoppzeit* bezüglich einer Filtration  $\mathcal{A}_t$ , wenn  $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}_t$  für alle  $t \in [0, \infty)$ .

**Definition 2.2.22.** (cf. [17, S. 103]) Sei  $X_t$  ein  $\mathcal{A}_t$  – adaptierter Prozess für  $t \in \mathbb{R}^+$  und  $\{\mathcal{A}_t\}$  eine Filtration. Dann nennt man  $X_t$  ein *lokales Martingal*, wenn es eine nicht fallende Folge von Stoppzeiten  $\{\tau_k\}$  gibt, sodass mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty$  und sodass für alle  $k$  der Prozess  $X_t^{(k)} = X_{t \wedge \tau_k} - X_0 \forall t \in \mathbb{R}^+$  ein Martingal bezüglich  $\mathcal{A}_t$  ist.

**Bemerkung 2.2.23.** Dieses erweiterte Itô – Integral ist aber im Allgemeinen kein Martingal mehr, sondern nur ein lokales Martingal.

### 2.2.5 Itô Formel

Da die Definition des stochastischen Integrals für rechnerische Zwecke nicht sehr nützlich ist, will man nun das Integral auswerten. Dies soll ähnlich zum Riemann – Integral entwickelt werden, bei dem der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung und die Kettenregel verwendet werden um das Integral auszuwerten. Allerdings gibt es bei stochastischen Integralen keine entsprechende Theorie für das Differenzieren, sondern nur für das Integrieren. Dennoch ist es möglich ein entsprechendes Analogon zur Kettenregel zu entwickeln, die Itô Formel.

Dafür benötigt man zunächst die folgende Definition.

**Definition 2.2.24.** (cf. [16, S. 143]) Sei  $B_t$  die 1 – dimensionale Brown'sche Bewegung auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Ein stochastischer Prozess  $X_t$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  heißt *Itô – Prozess*, wenn er der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, \omega) ds + \int_0^t g(s, \omega) dB_s(\omega) \quad (2.2.6)$$

ist, wobei  $g \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ .

**Satz 2.2.25. (1 – dimensionale Itô Formel)**(cf. [5, S. 91]) Sei  $X_t$  ein Itô – Prozess, der durch die Differentialgleichung  $dX_t = f dt + g dB_t$  gegeben ist und  $h(t, x)$  eine zweifach stetig differenzierbare Funktion auf  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Dann ist  $Y_t = h(t, X_t)$  wieder ein Itô – Prozess und es gilt

$$dY_t = \frac{\partial h}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial h}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2, \quad (2.2.7)$$

wobei  $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$  nach folgender Tabelle berechnet wird:

	$dt$	$dB_t$
$dt$	0	0
$dB_t$	0	$dt$

Dh. es gilt

$$dY_t = h_t(t, X_t) dt + h_x(t, X_t) f dt + \frac{1}{2} h_{xx}(t, X_t) g^2 dt + h_x(t, X_t) g dB_t.$$

**Beweis.** siehe [5, S. 91] □

Berechnet man nun etwa das Integral von  $\int_{t_0}^t s dB_s$ , so verwendet man die eben definierte Itô Formel für  $h(t, x) = tx$ . Mit  $Y_t = h(t, x) = tB_t$  erhält man dann:

$$\begin{aligned} d(tB_t) &= B_t dt + t dB_t \\ \Leftrightarrow tB_t &= \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s \\ \Leftrightarrow \int_0^t s dB_s &= tB_t - \int_0^t B_s ds. \end{aligned}$$

Dieses Beispiel führt zur partiellen Integration bei stochastischen Integralen.

**Satz 2.2.26.** (cf. [14, S. 46]) Sei  $f(s, \omega)$  eine stetige Funktion und für  $s \in [t_0, T]$  von beschränkter Schwankung für fast alle  $\omega \in \Omega$ . Dann gilt:

$$\int_0^t f(s) dB_s = f(t) B_t - \int_0^t B_s df_s.$$

Analog zur eindimensionalen Itô Formel formuliert man die allgemeine Itô Formel für die  $n$  – dimensionale Brown'sche Bewegung  $B(t, \omega) = (B_1(t, \omega), \dots, B_n(t, \omega))$ , die für jeden Prozess  $f_i(t, \omega)$  und  $g_{ij}(t, \omega)$ , wobei  $1 \leq i \leq m$  und  $1 \leq j \leq n$ , die Bedingungen aus Definition 2.2.6 erfüllen. Dann kann man folgende  $m$  – dimensionale Itô Prozesse finden:

$$\begin{aligned} dX_1 &= f_1 dt + g_{11} dB_1 + \dots + g_{1n} dB_n \\ &\vdots \\ dX_m &= f_m dt + g_{m1} dB_1 + \dots + g_{mn} dB_n \\ \Leftrightarrow dX_t &= f dt + g dB_t, \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

wobei  $X_t = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_m(t) \end{pmatrix}$ ,  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ ,  $g = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix}$  und  $dB_t = \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_m(t) \end{pmatrix}$ .

Für einen solchen  $m$  – dimensionalen Itô – Prozess erhält man die allgemeine Itô Formel durch:

**Satz 2.2.27.** (cf. [14, S. 48f]) Sei  $dX_t = f dt + g dB_t$  ein  $m$  – dimensionaler Itô – Prozess wie in 2.2.8. Sei weiters  $h : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $h(t, x) = (h_1(t, x), \dots, h_p(t, x))$  eine zweifach stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist  $Y(t, \omega) = h(t, X_t)$  wieder ein Itô – Prozess, dessen  $k$  – te Koordinate durch

$$dY_k = \frac{\partial h_k}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_i \frac{\partial h_k}{\partial x_i}(t, X_t) dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) (dX_i)(dX_j) \tag{2.2.9}$$

wobei  $(dX_i) \cdot (dX_j)$  nach folgender Tabelle berechnet wird:

	$dt$	$dB_1$	$dB_2$	$\dots$
$dt$	0	0	0	$\dots$
$dB_1$	0	$dt$	0	$\dots$
$dB_2$	0	0	$dt$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

**Beweis.** Analog zum Beweis des eindimensionalen Falles (cf. [22, S.110]). □



# Kapitel 3

## Stochastische Differentialgleichungen

### 3.1 Grundlagen

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen weiß man, dass Differentialgleichungen aus dem Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  aus einer Differenzengleichung

$$X_{t+h} - X_t = h \cdot b(t, X_t)$$

hervorgehen. Um eine stochastische Differentialgleichung zu erhalten, wird zunächst noch eine zufällige Störung  $\sigma$  hinzugefügt, sodass die Differenzengleichung die Form

$$X_{t+h} - X_t = h \cdot b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot (B_{t+h} - B_t).$$

annimmt, wobei  $(B_{t+h} - B_t)$  die Zuwächse der Brown'schen Bewegung  $B_t$  sind. Dividiert man nun durch  $h$  und lässt  $h$  gegen 0 gehen, so erhält man eine stochastische Differentialgleichung

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \frac{dB_t}{dt}$$

wobei  $\frac{dB_t}{dt} = W_t$  das weiße Rauschen ist. Diese Gleichung ist äquivalent zu:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t. \quad (3.1.1)$$

**Definition 3.1.1.** (cf. [1, S. 101]) Sei  $t_0, T \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq t_0 < T < \infty$ . Eine Differentialgleichung der Form (3.1.1) heißt (*Itô'sche*) *stochastische Differentialgleichung*, wobei  $b(\cdot, \cdot) : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\sigma(\cdot, \cdot) : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  messbare Funktionen sind. Die Zufallsvariable  $X(t_0) = X_0$  nennt man *Anfangswert* zum Zeitpunkt  $t_0$ .

**Bemerkung 3.1.2.** Die stochastische Differentialgleichung kann man auch als Integralgleichung auffassen:

$$X_t - X_0 = \int_{t_0}^T b(s, X_s)ds + \int_{t_0}^T \sigma(s, X_s)dB_s, \quad (3.1.2)$$

wobei die Integrale unter geeigneten Voraussetzungen an  $b$  bzw.  $\sigma$  definiert sind,  $\int \sigma dB_s$  ein stochastisches Integral ist (Kapitel 2) und  $T < \infty$ .  $b$  wird oft als Drift- und  $\sigma$  als Diffusionskoeffizient bezeichnet.

### 3. STOCHASTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

---

**Definition 3.1.3.** (cf. [1, S. 101]) Ein stochastischer Prozess heißt *Lösung der Differentialgleichung* (3.1.1) auf einem Intervall  $[t_0, T]$ , wenn er folgende Eigenschaften erfüllt:

- $X_t$  ist messbar bezüglich der kleinsten  $\sigma$ -Algebra, für die  $X_0$  und  $W_s$  messbar sind;
- es gilt:
  - $\int_{t_0}^T |b(s, X_s(\omega))| < \infty$ ,
  - $\int_{t_0}^T |\sigma(s, X_s(\omega))|^2 < \infty$ ;
- mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt die Gleichung (3.1.2).

**Beispiel 3.1.4.** (cf. [18, S. 67ff]) Wie in der Einführung besprochen, wird nun die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung  $L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F'(t)$  für eine äußerlich sinusförmige Spannung  $F(t) = F_0 \cdot \cos(\omega t)$  besprochen. (Zunächst wird sie jedoch ohne Zufälligkeiten behandelt und zu einem späteren Zeitpunkt mit einer zufälligen Störung.) Setzt man für  $F(t)$  die komplexe Spannung  $F(t) = F_0 \cdot e^{i\omega t}$  ein, erhält man die Differentialgleichung

$$Q''(t) + \frac{R}{L} \cdot Q'(t) + \frac{1}{LC} \cdot Q(t) = i \frac{\omega F_0}{L} e^{i\omega t}. \quad (3.1.3)$$

Der Real- bzw. Imaginärteil der komplexen Lösung liefert Lösungen für  $F(t) = F_0 \cdot \cos(\omega t)$  und  $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega t)$ . Die zugehörigen Eigenwerte der Differentialgleichung sind

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Hierbei können drei Fälle unterschieden werden:

- wenn  $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , dann erhält man zwei verschiedene reelle Eigenwerte und die homogene Lösung der Differentialgleichung lautet dann  $Q_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ ;
- wenn  $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , dann erhält man zwei gleiche reelle Eigenwerte und die homogene Lösung der Differentialgleichung ist dann  $Q_h(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{R}{2L} t}$ ;
- wenn  $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , dann erhält man zwei komplexe Eigenwerte und die homogene Lösung der Differentialgleichung ist dann  $Q_h(t) = c_1 e^{-\frac{R}{2L} t} \cos(\alpha t) + c_2 t e^{-\frac{R}{2L} t} \sin(\alpha t)$ , wobei  $\alpha = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} > 0$  ist.

In jedem Fall ist der Realteil der Eigenwerte negativ und die homogene Lösung konvergiert für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0.

Um die partikuläre Lösung  $Q_p$  zu erhalten, verwendet man den Ansatz  $Q_p(t) = k e^{i\omega t}$  für ein unbekanntes  $k$ . Nach zweimaligem Differenzieren, Einsetzen in (3.1.3) und einem Koeffizientenvergleich erhält man  $k = \frac{F_0}{R + i(L\omega - \frac{1}{\omega C})}$  und daher ist die Lösung der Differentialgleichung (3.1.3)



$$Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t) \approx Q_p(t) = \frac{F_0}{R + i(L\omega - \frac{1}{\omega C})} e^{i\omega t}$$

für  $t \rightarrow \infty$ . Die approximierte Lösung der Differentialgleichung ist also

$$Q(t) = \frac{1}{R + i(L\omega - \frac{1}{\omega C})} F(t), t \rightarrow \infty.$$

**Beispiel 3.1.5.** Das zweite Beispiel, das hier behandelt wird, ist das des Bevölkerungswachstums, das durch die Differentialgleichung  $N'(t) = \alpha(t) \cdot N(t)$  modelliert wird. Im einfachsten Fall ist  $\alpha(t) = \alpha$  konstant und das Anfangswertproblem lautet dann

$$N'(t) = \alpha \cdot N(t), N(0) = N_0,$$

wobei  $N(t)$  die Bevölkerung zum Zeitpunkt  $t$  und  $N_0 > 0$  die Anfangsbevölkerung ist. Mittels Substitution ( $N(t) = y$ ) und Separation der Variablen erhält man die Lösung  $N(t) = N_0 \cdot e^{\alpha t}$ , die für  $\alpha > 0$  und  $t \rightarrow \infty$  gegen  $\infty$  und für  $\alpha < 0$  und  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 geht. Der Parameter entspricht dabei einer konstanten Wachstums- oder Sterberate. Für den allgemeinen Fall ergibt sich Ähnliches.

## 3.2 Existenz und Eindeutigkeit

Lösungen stochastischer Differentialgleichungen sind unter bestimmten Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen existent und eindeutig. Jedoch kann man, wie auch bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, nur für wenige stochastische Differentialgleichungen analytische Lösungen angeben, sodass man auf eine numerische Approximation der Lösung angewiesen ist. Im Folgenden wird Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer stochastischen Differentialgleichung gezeigt sowie die numerische Approximation einer Beispielgleichung berechnet.

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen  $x'_t := \frac{dx_t}{dt} = f(t, x_t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  benötigt man für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, dass  $f$  die Lipschitzbedingung bezüglich  $x$  erfüllt und dass  $f$  für alle  $x$  bezüglich  $t$  beschränkt ist. Sind beide Bedingungen erfüllt, dann ist das Iterationsverfahren von Picard – Lindelöf

$$x_t^{(n)} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_s^{(n-1)}) ds, \quad x_t^{(0)} = x_0,$$

für  $n \rightarrow \infty$  konvergent gegen eine Lösung der Form  $x_t = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds$ .

Ähnlich zu diesem Iterationsverfahren will man eine Lösung einer stochastischen Differentialgleichung erhalten. Analog zum Satz von Picard – Lindelöf gilt folgender Existenz- und Eindeutigkeitssatz für stochastische Differentialgleichungen der Form (3.1.1):

**Theorem 3.2.1.** (cf. [14, S. 68]) Sei  $t_0, T \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq t_0 < T < \infty$ . Seien  $b(\cdot, \cdot) : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\sigma(\cdot, \cdot) : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  messbare Funktionen, die folgende Eigenschaften haben:

### 3. STOCHASTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

---

- *Wachstumsbeschränkung:*

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq c^2(1 + |x|^2) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, T] \text{ und eine Konstante } c, \quad (3.2.1)$$

- *Lipschitzbedingung:*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq c|x - y| \text{ für } x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, T] \text{ und eine Konstante } c. \quad (3.2.2)$$

Sei  $X_0$  eine Zufallsvariable, die unabhängig von der von  $B_t$  für  $t > 0$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra ist und für die  $EX_0^2 < \infty$  gilt. Dann hat die stochastische Differentialgleichung (3.1.1) eine stetige Lösung  $X_t$  auf  $[t_0, T]$ , sodass gilt:

$$\sup_{[t_0, T]} EX_t^2 < \infty,$$

und  $X_t(\omega)$  ist adaptiert bezüglich der von  $B_s(\cdot)$ ,  $s \leq t$ , und  $X_0$  erzeugten Filtration  $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_t^{X_0}$ . Außerdem ist die Lösung stückweise eindeutig, dh. wenn es zwei Lösungen  $X_t$  und  $Y_t$  mit demselben Anfangswert gibt, gilt:

$$P(\sup_{[t_0, T]} |X_t - Y_t| = 0) = 1.$$

**Bemerkung 3.2.2.** Der Beweis ist ähnlich zu dem von Picard – Lindelöf, bei dem die Picard – Iteration benutzt wird (cf. [18, S. 34ff]).

**Beweis.** Existenz:

Wie im Beweis des Satzes von Picard – Lindelöf definiert man:

$$\begin{aligned} X_t^{(0)} &= X_0, \\ X_t^{(n)} &= X_0 + \int_{t_0}^t b(s, X_s^{(n-1)}) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dB_s \text{ für } n \geq 1 \text{ und } t \in [t_0, T]. \end{aligned}$$

Nun ist zu zeigen, dass das Iterationsverfahren in  $[t_0, T]$  gleichmäßig gegen eine Lösung der Gleichung (3.1.1) konvergiert.

$$1. \text{ Schritt: } \sup_{[t_0, T]} E |X_t^{(n)}|^2 < \infty, \quad t \in [t_0, T].$$

Beweis mittels vollständiger Induktion: Nach Voraussetzung gilt  $EX_0^2 < \infty$  und somit  $\sup_{[t_0, T]} E |X_t^{(0)}|^2 < \infty$ . Angenommen die Behauptung stimmt für  $n - 1$ , dann folgt der Induktionsschritt mit Hilfe der Ungleichung

$$|x + y + z|^2 \leq 3(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2), \quad (3.2.3)$$

der Wachstumsbeschränkung (3.2.1) und des folgenden Spezialfalls der Cauchy – Schwarz – Ungleichung

$$\left| \int_{t_0}^t b \, ds \right|^2 = \left| \int_{t_0}^t 1 \cdot b \, ds \right|^2 \leq \int_{t_0}^t |1|^2 \, ds \cdot \int_{t_0}^t |b|^2 \, ds = (t - t_0) \int_{t_0}^t |b|^2 \, ds < \infty. \quad (3.2.4)$$

Man erhält somit

$$\begin{aligned}
 E \left| X_t^{(n)} \right|^2 &= E \left| X_0 + \int_{t_0}^t b(s, X_s^{(n-1)}) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dB_s \right|^2 \\
 &\stackrel{(3.2.3)}{\leq} 3 \left( E \left| X_0 \right|^2 + E \left| \int_{t_0}^t b(s, X_s^{(n-1)}) ds \right|^2 + E \left| \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dB_s \right|^2 \right) \\
 &\stackrel{(3.2.4), (2.2.4)}{\leq} 3E \left| X_0 \right|^2 + 3(t - t_0)E \left( \int_{t_0}^t |b(s, X_s^{(n-1)})|^2 ds \right) + \\
 &\quad E \left( \int_{t_0}^t |\sigma(s, X_s^{(n-1)})|^2 ds \right) \\
 &\stackrel{(3.2.1), (2.1.2)}{\leq} 3E \left| X_0 \right|^2 + 3(t - t_0) \int_{t_0}^t c^2 (1 + E \left| X_s^{(n-1)} \right|^2) ds + \\
 &\quad \int_{t_0}^t c^2 (1 + E \left| X_s^{(n-1)} \right|^2) ds \\
 &\leq 3E \left| X_0 \right|^2 + 3(t - t_0 + 1) \int_{t_0}^t c^2 (1 + E \left| X_s^{(n-1)} \right|^2) ds \\
 &\leq 3E \left| X_0 \right|^2 + 3(t - t_0 + 1)c^2 \left( (t - t_0) + \int_{t_0}^t E \left| X_s^{(n-1)} \right|^2 ds \right) \\
 &\leq 3E \left| X_0 \right|^2 + 3(t - t_0 + 1)c^2 \left( (t - t_0) + (t - t_0) \sup_{s \in [t_0, t]} E \left| X_s^{(n-1)} \right|^2 \right) \\
 &= 3E \left| X_0 \right|^2 + 3(t - t_0 + 1)c^2(t - t_0) \left( 1 + \sup_{s \in [t_0, t]} E \left| X_s^{(n-1)} \right|^2 \right) < \infty.
 \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\sup_{t \in [t_0, T]} E \left| X_t^{(n)} \right|^2 < \infty \quad \forall n \geq 1. \quad (3.2.5)$$

*2.Schritt:*  $X^{(n)}$  ist gleichmäßig konvergent im Quadratmittel.

Aus der Ungleichung  $|x + y|^2 \leq 2(|x|^2 + |y|^2)$  erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
 \left| X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \right|^2 &= \left| \int_{t_0}^t (b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})) ds + \int_{t_0}^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})) dB_s \right|^2 \\
 &\leq 2 \left| \int_{t_0}^t (b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})) ds \right|^2 + \\
 &\quad 2 \left| \int_{t_0}^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})) dB_s \right|^2.
 \end{aligned}$$

Nun kann man mit Hilfe von der CS-Ungleichung (3.2.4) und der Lipschitzbedingung (3.2.2) den ersten Term wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t (b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})) ds \right|^2 &\stackrel{(3.2.4)}{\leq} (t - t_0) \int_{t_0}^t |b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})|^2 ds \\ &\stackrel{(3.2.2)}{\leq} c^2 (t - t_0) \int_{t_0}^t |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds. \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts gilt somit

$$E \left| \int_{t_0}^t (b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})) ds \right|^2 \leq c^2 (t - t_0) \int_{t_0}^t E |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds.$$

Den zweiten Summanden schätzt man durch

$$\begin{aligned} E \left| \int_{t_0}^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})) dB_s \right|^2 &\stackrel{(2.2.4)}{=} E \left( \int_{t_0}^t |\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})|^2 ds \right) \\ &\stackrel{(3.2.2)}{\leq} c^2 E \left( \int_{t_0}^t |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds \right) \\ &= c^2 \int_{t_0}^t E |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds \end{aligned}$$

ab. Insgesamt ergibt sich somit

$$\begin{aligned} E |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 &\leq 2E \left| \int_{t_0}^t (b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})) ds \right|^2 + \\ &\quad 2E \left| \int_{t_0}^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})) dB_s \right|^2 \\ &\leq 2c^2 (t - t_0) \int_{t_0}^t E |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds + \\ &\quad 2c^2 \int_{t_0}^t E |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds \\ &= \underbrace{2c^2 (t - t_0 + 1)}_{=: M} \int_{t_0}^t E |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds. \end{aligned}$$

Durch Iteration und die Cauchysche Formel für  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t$

$$\left( \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_{n-1}} \dots \int_{t_0}^{t_1} g(s) ds dt_1 \dots dt_{n-1} = \int_{t_0}^t g(s) \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} ds \right)$$

erhält man:

$$E |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \leq M^n \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} E |X_s^{(1)} - X_s^{(0)}|^2 ds.$$

Weiters berechnet man

$$\begin{aligned}
 E |X_s^{(1)} - X_s^{(0)}|^2 &= E \left| \int_{t_0}^t b(s, X_s^{(0)}) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s^{(0)}) dB_s \right|^2 \\
 &\leq 2E \left| \int_{t_0}^t b(s, X_0) ds \right|^2 + 2E \left| \int_{t_0}^t \sigma(s, X_0) dB_s \right|^2 \\
 &\stackrel{(3.2.4), (2.2.4)}{\leq} 2(t - t_0) E \int_{t_0}^t |b(s, X_0)|^2 ds + 2E \int_{t_0}^t |\sigma(s, X_0)|^2 ds \\
 &\stackrel{(3.2.1), (2.1.2)}{\leq} 2(t - t_0) \int_{t_0}^t c^2(1 + E |X_0|^2) ds + 2 \int_{t_0}^t c^2(1 + E |X_0|^2) ds \\
 &= 2c^2(t - t_0 + 1) \int_{t_0}^t (1 + E |X_0|^2) ds \\
 &= M(t - t_0)(1 + E |X_0|^2) = L \dots \text{konstant} \\
 &\Rightarrow \sup_{t \in [t_0, T]} E |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \leq L \frac{(M(t - t_0))^n}{n!} \tag{3.2.6}
 \end{aligned}$$

Daher ist  $X^{(n)}$  tatsächlich gleichmäßig konvergent im Quadratmittel.

3.Schritt:  $X^{(n)}$  ist gleichmäßig konvergent (mit Wahrscheinlichkeit 1).

Um gleichmäßige Konvergenz zu zeigen, muss man  $\sup_{t \in [t_0, T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|$  abschätzen.

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \in [t_0, T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 &= \sup \left| \int_{t_0}^t (b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})) ds + \right. \\
 &\quad \left. \int_{t_0}^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})) dB_s \right|^2 \\
 &\leq 2 \sup \left| \int_{t_0}^t (b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})) ds \right|^2 + \\
 &\quad 2 \sup \left| \int_{t_0}^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})) dB_s \right|^2 \\
 &\stackrel{(3.2.4)}{\leq} 2(t - t_0) \sup \int_{t_0}^t |(b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)}))|^2 ds + \\
 &\quad 2 \sup \left| \int_{t_0}^t (\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{(n-1)})) dB_s \right|^2.
 \end{aligned}$$

Da das Itô – Integral ein Martingal ist, erhält man mit Hilfe folgender Eigenschaft

$$E \left( \sup_{a \leq t \leq b} |F_t - F_a|^2 \right) \leq 4 \int_a^b E |G(s)|^2 ds \text{ wobei } F_t = \int_{t_0}^t G(s) dB_s \tag{3.2.7}$$

und der Lipschitzbedingung (3.2.2):

$$\begin{aligned}
 E \left( \sup_{t \in [t_0, T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \right) &\leq 2(T - t_0)c^2 \int_{t_0}^T E |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds + \\
 &\quad 4 \cdot 2c^2 \int_{t_0}^T E |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds \\
 &= 2c^2(T - t_0 + 4) \int_{t_0}^T E |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds \\
 &\stackrel{(3.2.6)}{\leq} \underbrace{2c^2(T - t_0 + 4)L}_{\tilde{L}} \frac{(M(t - t_0))^{n-1}}{(n-1)!}.
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Doob's Martingal – Ungleichung

$$P \left( \sup_{t \in [t_0, T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > r \right) \leq E \left( \sup_{t \in [t_0, T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \cdot \frac{1}{r^2} \right)$$

und der gerade errechneten Abschätzung folgt

$$\begin{aligned}
 P \left( \sup_{t \in [t_0, T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > \frac{1}{n^2} \right) &\leq \tilde{L} \cdot \frac{(M(t - t_0))^{n-1}}{(n-1)!} \cdot n^4 \\
 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P \left( \sup_{t \in [t_0, T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > \frac{1}{n^2} \right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{L} \cdot \frac{(M(t - t_0))^{n-1}}{(n-1)!} \cdot n^4.
 \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Borel und Cantelli und dem Konvergenzkriterium von Weierstraß folgt, dass

$$P \left( \sup_{t \in [t_0, T]} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > \frac{1}{n^2} \text{ für } n \text{ ausreichend groß} \right) = 0.$$

Daher konvergiert  $X_t^{(n)} = X_0 + \sum_{i=1}^n [X_t^{(i)} - X_t^{(i-1)}]$  mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{\infty} [X_t^{(i)} - X_t^{(i-1)}]. \quad (3.2.8)$$

4. Schritt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} X^{(n)}$  ist eine Lösung von (3.1.1).

Zunächst ist (3.2.8) messbar bezüglich  $\mathcal{A}_t$  (der  $\sigma$ -Algebra die von  $X_0$  und  $W_s$  für  $s \leq t$  erzeugt wird), da es der Grenzwert eines stochastischen Prozesses ist. Außerdem ist  $X_t$  stetig (da es ein gleichmäßiger Grenzwert eines stetigen stochastischen Prozesses ist und nach Schritt 2 ist  $X^{(n)}$  gleichmäßig konvergent im Quadratmittel).

Lässt man nun  $n$  gegen  $\infty$  gehen, so sieht man, dass  $X_t$  eine Lösung von (3.1.1) ist. Die gleichmäßige Konvergenz und (3.2.2) implizieren, dass

$$\left| \int_{t_0}^t b(s, X_s^{(n)}) ds - \int_{t_0}^t b(s, X_s) ds \right| \leq c \int_{t_0}^t |X_s^{(n)} - X_s| ds \rightarrow 0 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1$$

und

$$\int_{t_0}^t |\sigma(s, X_s^n) ds - \sigma(s, X_s)|^2 ds \leq c^2 \int_{t_0}^t |X_s^n - X_s|^2 ds \rightarrow 0 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1.$$

Das impliziert, dass  $\sigma(s, X_s^{(n)}) \rightarrow \sigma(s, X_s)$  in  $L^2(\Omega)$  und somit

$$\int_{t_0}^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB_s \rightarrow \int_{t_0}^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

Im letzten Schritt wird die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt:

Angenommen es gibt zwei Lösungen  $X_t$  und  $Y_t$  von (3.1.1) mit den Anfangsbedingungen  $X_0$  bzw.  $Y_0$ , dann gilt

$$E(|X_t - Y_t|^2) = E\left(\left|(X_0 - Y_0) + \int_{t_0}^t (b(s, X_s) ds - b(s, Y_s)) ds + \int_{t_0}^t (\sigma(s, X_s) ds - \sigma(s, Y_s)) dB_s\right|^2\right).$$

Durch eine Rechnung ähnlich wie in Schritt 1 folgt

$$E(|X_t - Y_t|^2) \leq 3E(|X_0 - Y_0|^2) + 3(t - t_0 + 1)c^2 \int_{t_0}^t E(|X_s - Y_s|^2) ds.$$

Nun erhält man mit Hilfe der Gronwall Ungleichung (cf. [19, S. 132]), dass

$$E(|X_t - Y_t|^2) \leq 3E(|X_0 - Y_0|^2) \cdot \exp[3(t - t_0 + 1)c^2(t - t_0)].$$

Da nun die Anfangsbedingungen nach Voraussetzung gleich sind ist  $E(|X_0 - Y_0|^2) = 0$  und somit ist  $E(|X_t - Y_t|^2) = 0 \forall t \geq t_0$ . Somit folgt

$$P(X_t - Y_t = 0 \forall t \in [t_0, T]) = 1$$

und damit die Eindeutigkeit. □

**Bemerkung 3.2.3.** (i) Das wichtige Resultat, dass die Lücke der Fehlerabschätzung zur Konvergenz schließt, ist das Lemma von Borel und Cantelli (2.1.6).

(ii) Die Lipschitzbedingung an  $b$  und  $\sigma$  garantiert, dass sich die Funktionen in der Raumkoordinate nicht zu schnell verändern.

(iii) Da aus der Lipschitzstetigkeit die Stetigkeit folgt, werden unstetige Funktionen als Koeffizienten ausgeschlossen.

- (iv) Durch die Wachstumsbeschränkung werden  $b$  und  $\sigma$  bezüglich  $t \in [t_0, T]$  gleichmäßig und bezüglich  $x$  auf höchstens lineares Wachstum beschränkt. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, kommt es zur „Explosion“ der Lösung. Dieser Effekt ist bereits von den gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannt und bedeutet, dass der Wert der Lösung in endlicher Zeit  $\infty$  werden kann.

**Beispiel 3.2.4.** (cf. [7, S. 94]) Man betrachte folgendes Anfangswertproblem :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{2}aX^3, \quad X(0) = X_0.$$

Dann ist  $X_t = \left(-at + \frac{1}{X_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$  eine Lösung des AWP. Ist nun  $a$  positiv und  $X_0 = (-at)^{-\frac{1}{2}}$  so explodiert die Lösung. Ist hingegen  $a$  negativ so explodiert die Lösung nicht.

**Beispiel 3.2.5.** (cf. [14, S. 66f]) Nun zurück zu dem Beispiel der Ladung  $Q(t)$  eines elektrischen Stromkreises an einem Fixpunkt zur Zeit  $t$ , jedoch in diesem Fall mit einer zufälligen Störung  $W_t$ . Die Differentialgleichung lautet dann ( $t_0 = 0$ ):

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F_t = H_t + aW_t, \quad (3.2.9)$$

wobei  $L$ ,  $R$  und  $C$  konstant sind.

Betrachtet man den Vektor  $X = X(t, \omega) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} Q_t \\ Q'_t \end{pmatrix}$  so erhält man ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} X'_1 &= X_2, \\ LX'_2 &= -RX_2 - \frac{1}{C}X_1 + H_t + aW_t \end{aligned}$$

oder in Matrixschreibweise

$$dX = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}}_A X(t)dt + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H_t}{C} \end{pmatrix}}_{G(t)} dt + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}}_K dB_t \text{ mit } W_t dt = dB_t.$$

Nun hat man eine 2 dimensionale stochastische Differentialgleichung, die man, um die 2 dimensionale Itô Formel anzuwenden, mit  $\exp(-At)$ , wobei  $\exp(G) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} G^n$  für  $G$  eine  $n \times n$ -Matrix, multipliziert. Die Differentialgleichung ist dann der Form

$$\begin{aligned} \exp(-At)dX &= \exp(-At)AX(t)dt + \exp(-At)G(t)dt + \exp(-At)KdB_t \\ \Leftrightarrow \exp(-At)dX - \exp(-At)AX(t)dt &= \exp(-At)G(t)dt + \exp(-At)KdB_t \\ \Leftrightarrow d(\exp(-At)X(t)) &= \exp(-At)G(t)dt + \exp(-At)KdB_t. \end{aligned}$$

Nun benutzt man die 2 - dimensionale Itô Formel für die Funktion  $g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $g(t, x_1, x_2) = \exp(-At) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .



$$\begin{aligned} d(\exp(-At)X_t) &= (-A) \cdot \exp(-At)X_t dt + \exp(-At) [G_t dt + K dB_t] \\ &\Leftrightarrow \exp(-At)X_t - X_0 = \int_0^t \exp(-As)G_s ds + \int_0^t \exp(-As)K dB_s. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der partiellen Integration für stochastische Integrale (Satz 2.2.26) erhält man somit

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp(-As)K dB_s &= K \left( \exp(-At)B_t - \int_0^t (-A) \exp(-As)B_s ds \right) \\ &= K \exp(-At)B_t + K \int_0^t A \exp(-As)B_s ds. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\begin{aligned} \exp(-At)X_t &= X_0 + \int_0^t \exp(-As)G_s ds + K \exp(-At)B_t + K \int_0^t A \exp(-As)B_s ds \\ X_t &= \exp(At) \cdot \left( X_0 + \int_0^t \exp(-As)G_s ds + \right. \\ &\quad \left. K \exp(-At)B_t + K \int_0^t A \exp(-As)B_s ds \right). \end{aligned}$$

**Beispiel 3.2.6.** (cf. [14, S. 63ff]) Auf analoge Weise sollen nun Zufälligkeiten im Beispiel des Bevölkerungswachstums  $N'(t) = \alpha(t) \cdot N(t)$  berücksichtigt werden. Daher nimmt man an, dass  $\alpha(t) = c_t + a \cdot W_t$ , wobei  $a$  konstant und  $W_t$  das weiße Rauschen ist. Der einfachste Fall ist der, bei dem  $c_t$  konstant ist, dh.  $c_t = c$ . Daher erhalten wir nun die stochastische Differentialgleichung

$$N'_t = \alpha(t) \cdot N(t) \Leftrightarrow dN_t = c \cdot N_t dt + a \cdot N_t dB_t \Leftrightarrow \frac{dN_t}{N_t} = c dt + a dB_t.$$

O. B. d. A. sei  $t_0 = 0$ . Integriert man diese Gleichung nun, so erhält man

$$\int_0^t \frac{dN_s}{N_s} = c \cdot t + a \cdot B_t, \tag{3.2.10}$$

wobei  $B_0 = 0$ .

Um das Integral auszuwerten verwendet man die Itô Formel für  $g(t, x) = \ln x, x > 0$  und

erhält somit für das Integral

$$\begin{aligned}
 d(\ln N_t) &= \frac{1}{N_t} \cdot dN_t + \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{N_t^2} \right) \cdot (dN_t)^2 \\
 &= \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2N_t^2} \cdot \left( \underbrace{c^2 N_t^2 (dt)^2 + 2acN_t^2 dt dB_t}_{=0, \text{ da nach Itô's Formel } dt dB_t = W_t(dt)^2 = 0} + \underbrace{a^2 N_t^2 (dB_t)^2}_{a^2 N_t^2 dt} \right) \\
 &= \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2N_t^2} a^2 N_t^2 dt \\
 &= \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2} a^2 dt.
 \end{aligned}$$

Setzt man dies nun in die Integralgleichung (3.2.10) ein, erhält man

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \frac{dN_s}{N_s} &= \int_0^t \left( d(\ln N_s) + \frac{a^2}{2} \right) ds = \ln N_s \Big|_0^t - \frac{a^2}{2} t \Big|_0^t = c \cdot t + a \cdot B_t \\
 \ln N_t - \ln N_0 + \frac{a^2}{2} \cdot t &= c \cdot t + a \cdot B_t \\
 \ln \frac{N_t}{N_0} &= c \cdot t - \frac{a^2}{2} \cdot t + a \cdot B_t \\
 &= \left( c - \frac{a^2}{2} \right) t + a \cdot B_t \\
 \Leftrightarrow N_t &= N_0 \cdot \exp \left( \left( c - \frac{a^2}{2} \right) t + a \cdot B_t \right).
 \end{aligned}$$

#### 3.2.1 Starke und schwache Lösungen

Die Lösung, die in Theorem 3.2.1 gefunden wurde, ist eine starke Lösung, da die Lösung adaptiert ist bezüglich der von  $B_t$  und  $X_0$  erzeugten Filtration. Genau genommen gibt es zwei Möglichkeiten eine starke Lösung zu definieren. Von nun an sei o. B. d. A.  $t_0 = 0$ .

Erste Möglichkeit, die bisher verwendet wurde, ist:

**Definition 3.2.7.** (cf. [24, S. 285]) Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine *starke Lösung* der Differentialgleichung (3.1.1) ist definiert als stochastischer Prozess  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  bezüglich einer bestimmten Brown'schen Bewegung  $B_t$  und der Anfangsbedingung  $X_0$ , der stetige Pfade besitzt und folgende Eigenschaften hat:

- (i)  $X_t$  ist adaptiert bezüglich einer Filtration  $\mathcal{A}_t$ ,
- (ii)  $P(X(0) = X_0) = 1$ ,
- (iii)  $P \left( \int_0^t (b(s, X_s) + \sigma^2(s, X_s)) ds < \infty \right) = 1$ ,
- (iv)  $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$  gilt fast sicher für alle  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Die zweite Möglichkeit ist folgende:

**Definition 3.2.8.** (cf. [19, S. 127]) Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien eine Brown'sche Bewegung  $\tilde{B}_t$  und eine Anfangsbedingung  $X_0$ , die unabhängig von  $\tilde{B}_t$  ist, gegeben. Eine *starke Lösung* der Differentialgleichung (3.1.1) ist eine messbare Funktion  $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}$ , wobei  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n} = \{\omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n : \omega \text{ ist stetig}\}$  und  $n \geq 1$ , sodass gilt

$$X_t = F(X_0, \tilde{B}_t).$$

**Bemerkung 3.2.9.** (i) In der Definition von 3.2.8 sind also  $X_0$  und  $\tilde{B}_t$  ein Teil der Lösung.

**Definition 3.2.10.** (cf. [22, S. 246]) Seien  $b$  und  $\sigma$  wie in Theorem 3.2.1 gegeben mit  $t_0 = 0$ . Ein stochastischer Prozess  $\hat{X}_t$  heißt *schwache Lösung* der Differentialgleichung (3.1.1) mit Anfangsverteilung  $\mu$ , wenn es eine Brown'sche Bewegung  $\hat{B}_t$  gibt und einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit Filtration  $\mathcal{A}_t$  sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $\hat{B}_t$  ist eine Brown'sche Bewegung bezüglich  $\mathcal{A}_t$ ,
- (ii)  $X_0$  hat die Verteilung  $\mu$ ,
- (iii)  $\hat{X}_t$  erfüllt die Gleichung  $\hat{X}_t = X_0 + \int_0^t b(s, \hat{X}_s)ds + \int_0^t \sigma(s, \hat{X}_s)dB_s$  fast sicher,
- (iv)  $\int_0^t \left( b(s, \hat{X}_s) + \sigma^2(s, \hat{X}_s) \right) ds < \infty$  fast sicher.

**Bemerkung 3.2.11.** (i) Aus Bedingung (i) der Definition folgt, dass  $\hat{B}_t$  ein Martingal ist. Daher ist die rechte Seite von (3.1.1) definiert, obwohl  $\hat{X}_t$  nicht adaptiert ist bezüglich  $\mathcal{A}_t$ .

(ii) Versucht man also eine schwache Lösung zu finden, muss man ebenfalls den Wahrscheinlichkeitsraum und die Filtration angeben.

(iii) Für einen stochastischen Prozess  $X_t$  gilt

$$X_t \text{ starke Lösung} \Rightarrow X_t \text{ schwache Lösung}$$

einer stochastischen Differentialgleichung.

### 3.2.2 Eigenschaften von Lösungen

Nun wird auf die Eigenschaften von Lösungen eingegangen.

Da man bei realen Modellen sowohl die Koeffizienten  $b, \sigma$ , als auch die Anfangsbedingung nicht genau bestimmen kann, interessiert man sich dafür ob kleine Änderungen der Daten zu kleinen Änderungen der Lösung führen. Ist dies nicht der Fall so ist die Lösung nicht aussagekräftig.

### 3. STOCHASTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

**Satz 3.2.12.** (cf. [5, S. 115]) Seien  $b_N(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\sigma_N(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  messbare Funktionen die (3.2.1) und (3.2.2) aus Theorem 3.2.1 erfüllen. Sei weiters  $\{X_0^{(N)}\}$  eine Folge von Anfangsbedingungen mit  $E|X_0^{(N)}|^2 < \infty$ , sodass  $X_0^{(N)} \rightarrow X_0$  in  $L^2(\Omega)$  und für alle  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$  gelte

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b_N(t, x) = b_0(t, x),$$

und

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(t, x) = \sigma_0(t, x).$$

Für die Lösung  $X_t^{(N)} = X_0^{(N)} + \int_0^t b_N(s, X_s^{(N)}) ds + \int_0^t \sigma_N(s, X_s^{(N)}) dB_s$ , mit  $N \in \mathbb{N}_0$ , der stochastischen Differentialgleichung (3.1.1) gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sup_{t \in [0, T]} E \left[ (X_t^{(N)} - X_t^{(0)})^2 \right] \right) = 0.$$

**Beweis.** (cf. [5, S. 115f]) Man betrachtet nun

$$\begin{aligned} X_t^{(N)} - X_t^{(0)} &= X_0^{(N)} - X_0^{(0)} + \int_0^t [b_N(s, X_s^{(N)}) - b_0(s, X_s^{(0)})] ds + \\ &\quad \int_0^t [\sigma_N(s, X_s^{(N)}) - \sigma_0(s, X_s^{(0)})] dB_s \\ &= X_0^{(N)} - X_0^{(0)} + \\ &\quad \int_0^t ([b_N(s, X_s^{(N)}) - b_N(s, X_s^{(0)})] + [b_N(s, X_s^{(0)}) - b_0(s, X_s^{(0)})]) ds + \\ &\quad \int_0^t ([\sigma_N(s, X_s^{(N)}) - \sigma_N(s, X_s^{(0)})] + [\sigma_N(s, X_s^{(0)}) - \sigma_0(s, X_s^{(0)})]) dB_s \\ &= Z_t^{(N)} + \int_0^t [b_N(s, X_s^{(N)}) - b_N(s, X_s^{(0)})] ds + \\ &\quad \int_0^t [\sigma_N(s, X_s^{(N)}) - \sigma_N(s, X_s^{(0)})] dB_s, \end{aligned}$$

wobei

$$Z_t^{(N)} = X_0^{(N)} - X_0^{(0)} + \int_0^t [b_N(s, X_s^{(0)}) - b_0(s, X_s^{(0)})] ds + \int_0^t [\sigma_N(s, X_s^{(0)}) - \sigma_0(s, X_s^{(0)})] dB_s.$$

Mit Ungleichung (3.2.3) und einer Rechnung wie in Schritt 1 des Beweises von Satz 3.2.1 erhält man

$$E \left[ (X_t^{(N)} - X_t^{(0)})^2 \right] \leq 3E[(Z_t^{(N)})^2] + \underbrace{3(T+1)c^2}_k \int_0^t E[(X_s^{(N)} - X_s^{(0)})^2] ds.$$

Mit Hilfe der Gronwall Ungleichung (cf. [5, S. 114]) folgt

$$\begin{aligned} E \left[ (X_t^{(N)} - X_t^{(0)})^2 \right] &\leq 3E[(Z_t^{(N)})^2] + k \int_0^t e^{k(t-s)} 3E[(Z_s^{(N)})^2] ds \\ &\leq 3E[(Z_t^{(N)})^2] + 3ke^{kt} \int_0^t E[(Z_s^{(N)})^2] ds. \end{aligned}$$

Um die gewünschte Abschätzung zu erhalten, muss gelten  $\sup_{t \in [0, T]} E \left[ (Z_t^{(N)})^2 \right] \rightarrow 0$ . Nach (3.2.3), der Cauchy – Schwarz – Ungleichung und der Itô – Isometrie (2.2.4) ist

$$\frac{1}{3} E[(Z_t^{(N)})^2] \leq E \left[ (X_0^{(N)} - X_0^{(0)})^2 + T \int_0^T |b_N(s, X_s^{(0)}) - b_0(s, X_s^{(0)})|^2 ds + \int_0^T |\sigma_N(s, X_s^{(0)}) - \sigma_0(s, X_s^{(0)})|^2 ds \right].$$

Unter Verwendung des Satzes der dominierten Konvergenz (cf. Satz 2.1.27) mit Majorante  $K(1 + |X_s^{(0)}|)^2$  konvergiert dieser Erwartungswert gegen 0 und somit gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sup_{t \in [0, T]} E \left[ (X_t^{(N)} - X_t^{(0)})^2 \right] \right) = 0.$$

□

**Bemerkung 3.2.13.** Die Lösung hängt also stetig von der Anfangsbedingung ab.

### Momente von Lösungen

**Satz 3.2.14.** (cf. [6, S. 82]) Seien  $b$  und  $\sigma$  wie in Theorem 3.2.1, sodass die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems (3.1.1) mit  $X(0) = X_0$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  garantiert ist und sei weiters  $E |X_0|^{2m} < \infty$  für  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Dann erfüllt die Lösung  $X_t$  von

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

auf  $[0, T]$  folgende Abschätzungen:

$$E |X_t|^{2m} \leq (1 + E |X_0|^{2m}) e^{kt} \quad \forall t \in [0, T], \tag{3.2.12}$$

und

$$E |X_t - X_0|^{2m} \leq d(1 + E |X_0|^{2m}) t^m e^{kt} \quad \forall t \in [0, T], \tag{3.2.13}$$

wobei  $k = 2m(2m + 1)c^2$  und  $d$  Konstanten sind, die nur von  $m$ ,  $c$  (aus der Wachstumsbeschränkung) und  $T$  abhängen.

**Beweis.** (cf. [6, S. 82ff]) Sei  $N \in \mathbb{N}$  und seien weiters  $b^{(N)} = \begin{cases} b(t, x), & \text{wenn } |x| \leq N \\ b(t, N \frac{x}{|x|}), & \text{wenn } |x| > N \end{cases}$

und  $\sigma^{(N)} = \begin{cases} \sigma(t, x), & \text{wenn } |x| \leq N \\ \sigma(t, N \frac{x}{|x|}), & \text{wenn } |x| > N \end{cases}$  beschränkte Funktionen, die nach Voraussetzung die Wachstumsbeschränkung (3.2.1) und die Lipschitzbedingung (3.2.2) erfüllen. Sei weiters  $X_0^{(N)} = \begin{cases} X_0(\omega), & \text{wenn } |x| \leq N \\ N \frac{X_0(\omega)}{|X_0(\omega)|}, & \text{wenn } |x| > N \end{cases}$ . Der derart definierte Prozess  $X_t^{(N)}$  ist Lösung des AWP

$$dX_t^{(N)} = b^{(N)}(t, X_t^{(N)})dt + \sigma^{(N)}(t, X_t^{(N)})dB_t \text{ mit } X^{(N)}(0) = X_0^{(N)}$$

bzw. als Integralgleichung

$$X_t^{(N)} = X_0^{(N)} + \int_0^t b^{(N)}(t, X_t^{(N)}) dt + \int_0^t \sigma^{(N)}(t, X_t^{(N)}) dB_t.$$

der für  $N \rightarrow \infty$  auf  $[0, T]$  mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen  $X_t$  konvergiert.  
Mittels Itô's Formel für  $h(t, x) = |x|^{2m}$  und  $X_t^{(N)}$  folgt:

$$\begin{aligned} \left| X_t^{(N)} \right|^{2m} &= |X_0^{(N)}|^{2m} + \int_0^t 2m |X_s^{(N)}|^{2m-1} b^{(N)}(s, X_s^{(N)}) ds + \\ &\quad \int_0^t \frac{1}{2} 2m(2m-1) |X_s^{(N)}|^{2m-2} |\sigma^{(N)}(s, X_s^{(N)})|^2 ds + \\ &\quad \int_0^t 2m |X_s^{(N)}|^{2m-1} \sigma^{(N)}(s, X_s^{(N)}) dB_s \\ &= |X_0^{(N)}|^{2m} + \int_0^t 2m |X_s^{(N)}|^{2m-2} X_s^{(N)} b^{(N)}(s, X_s^{(N)}) ds + \\ &\quad \int_0^t m |X_s^{(N)}|^{2m-2} |\sigma^{(N)}(s, X_s^{(N)})|^2 ds + \\ &\quad \int_0^t 2m(m-1) |X_s^{(N)}|^{2m-4} |X_s^{(N)} \sigma^{(N)}(s, X_s^{(N)})|^2 ds + \\ &\quad \int_0^t 2m |X_s^{(N)}|^{2m-1} \sigma^{(N)}(s, X_s^{(N)}) dB_s. \end{aligned}$$

Aus dem Theorem 3.2.1 folgt, dass  $E|X_t|^{2m}$  existiert, wenn  $E|X_0|^{2m} < \infty$  (cf. Schritt 1 im Beweis von 3.2.1).

$$\begin{aligned} E \left( \left| X_t^{(N)} \right|^{2m} \right) &= E \left[ |X_0^{(N)}|^{2m} \right] + E \left[ \int_0^t 2m |X_s^{(N)}|^{2m-2} X_s^{(N)} b^{(N)}(s, X_s^{(N)}) ds \right] + \\ &\quad E \left[ \int_0^t m |X_s^{(N)}|^{2m-2} |\sigma^{(N)}(s, X_s^{(N)})|^2 ds \right] + \\ &\quad E \left[ \int_0^t 2m(m-1) |X_s^{(N)}|^{2m-4} |X_s^{(N)} \sigma^{(N)}(s, X_s^{(N)})|^2 ds \right] + \\ &\quad E \left[ \int_0^t 2m |X_s^{(N)}|^{2m-1} \sigma^{(N)}(s, X_s^{(N)}) dB_s \right], \end{aligned}$$

wobei nach Satz 2.2.12(iv) folgt, dass  $E \left[ \int_0^t 2m |X_s^{(N)}|^{2m-1} \sigma^{(N)}(s, X_s^{(N)}) dB_s \right] = 0$ .

Mit Hilfe der Cauchy – Schwarz – Ungleichung und der Wachstumsbeschränkung (3.2.1)

erhält man

$$\begin{aligned}
 E \left( \left| X_t^{(N)} \right|^{2m} \right) &\leq E \left[ \left| X_0^{(N)} \right|^{2m} \right] + 2mc^2 \int_0^t E \left[ \left( 1 + \left| X_s^{(N)} \right|^2 \right) \left| X_s^{(N)} \right|^{2m-2} \right] ds + \\
 &\quad mc^2 \int_0^t E \left[ \left( 1 + \left| X_s^{(N)} \right|^2 \right) \left| X_s^{(N)} \right|^{2m-2} \right] ds + \\
 &\quad 2m(m-1)c^2 \int_0^t E \left[ \left( 1 + \left| X_s^{(N)} \right|^2 \right) \left| X_s^{(N)} \right|^{2m-2} \right] ds \\
 &= E \left[ \left| X_0^{(N)} \right|^{2m} \right] + \underbrace{(m(m+1))}_{\frac{k}{2}} c^2 \int_0^t E \left[ \left( 1 + \left| X_s^{(N)} \right|^2 \right) \left| X_s^{(N)} \right|^{2m-2} \right] ds.
 \end{aligned}$$

Nun folgt mit folgender Abschätzung  $(1 + |x|^2) |x|^{2m-2} \leq 1 + 2|x|^{2m}$ , dass

$$\begin{aligned}
 E \left( \left| X_t^{(N)} \right|^{2m} \right) &\leq E \left[ \left| X_0^{(N)} \right|^{2m} \right] + \frac{k}{2} \int_0^t E \left( 1 + 2 \left| X_s^{(N)} \right|^{2m} \right) ds \\
 &= E \left[ \left| X_0^{(N)} \right|^{2m} \right] + \frac{k}{2} t + k \int_0^t E \left( \left| X_s^{(N)} \right|^{2m} \right) ds.
 \end{aligned}$$

Wendet man nun die Gronwall Ungleichung (cf. [5, S. 114]) an, so erhält man

$$\begin{aligned}
 E \left( \left| X_t^{(N)} \right|^{2m} \right) &\leq E \left[ \left| X_0^{(N)} \right|^{2m} \right] + \frac{k}{2} t + k \int_0^t e^{k(t-s)} \left( E \left[ \left| X_0^{(N)} \right|^{2m} \right] + \frac{k}{2} s \right) ds \\
 &\stackrel{\text{Part. Int.}}{=} E \left[ \left| X_0^{(N)} \right|^{2m} \right] + \frac{k}{2} t + k \left( - \left( E \left[ \left| X_0^{(N)} \right|^{2m} \right] + \frac{k}{2} s \right) \cdot \frac{e^{k(t-s)}}{k} \Big|_0^t + \right. \\
 &\quad \left. \int_0^t \frac{1}{2} e^{k(t-s)} ds \right) \\
 &= E \left[ \left| X_0^{(N)} \right|^{2m} \right] + \frac{k}{2} t - E \left[ \left| X_0^{(N)} \right|^{2m} \right] - \frac{k}{2} t + E \left[ \left| X_0^{(N)} \right|^{2m} \right] \cdot e^{kt} - \frac{1}{2} + \\
 &\quad \frac{e^{k(t)}}{2} \\
 &= e^{kt} \left( E \left[ \left| X_0^{(N)} \right|^{2m} \right] + \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot e^{-kt}}_{\leq 0 \leq \frac{1}{2}} \right) \leq e^{kt} \left( 1 + E \left[ \left| X_0^{(N)} \right|^{2m} \right] \right).
 \end{aligned}$$

Für  $N \rightarrow \infty$  erhält man das gewünschte Resultat für  $X_t$ .

Um die zweite Abschätzung zu beweisen betrachten man das AWP (3.2.11). Mit Hilfe der Ungleichung

$$|x + y|^{2m} \leq 2^{2m-1} (|x|^{2m} + |y|^{2m}), \quad (3.2.14)$$

folgt dass:

$$\begin{aligned}
 E |X_t - X_0|^{2m} &= E \left| \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \right|^{2m} \\
 &\leq 2^{2m-1} \left( E \left| \int_0^t b(s, X_s) ds \right|^{2m} + E \left| \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \right|^{2m} \right).
 \end{aligned}$$

### 3. STOCHASTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

---

Mit Hilfe der Hölder – Ungleichung und folgender Abschätzung (cf. [6, S. 61])

$$E \left| \int_a^b G_t dB_t \right|^{2k} \leq [k(2k-1)]^k (b-a)^{k-1} \int_a^b E |G_t|^{2k} dt$$

folgt

$$E |X_t - X_0|^{2m} \leq 2^{2m-1} \left[ t^{2m-1} \int_0^t E |b(s, X_s)|^{2m} ds + \right. \\ \left. t^{m-1} (m(2m-1))^m \int_0^t E |\sigma(s, X_s)|^{2m} ds \right].$$

Wendet man nun die Wachstumsbeschränkung (3.2.1) an, erhält man

$$E |X_t - X_0|^{2m} \leq 2^{2m-1} c^{2m} [t^m + (m(2m-1))^m] t^{m-1} \int_0^t E [1 + |X_s|^2]^m ds \\ \stackrel{(3.2.14)}{\leq} 2^{2m-1} c^{2m} [t^m + (m(2m-1))^m] t^{m-1} \int_0^t [2^{m-1} + 2^{m-1} E |X_s|^{2m}] ds \\ \stackrel{(3.2.12)}{\leq} 2^{3m-2} c^{2m} [t^m + (m(2m-1))^m] t^{m-1} \int_0^t [1 + (1 + E |X_0|^{2m}) e^{ks}] ds.$$

Bleibt nur noch die Abschätzung des Integrals. Es gilt:

$$\int_0^t [1 + (1 + E |X_0|^{2m}) e^{ks}] ds = t + \frac{(1 + E |X_0|^{2m})}{k} e^{kt} - \frac{(1 + E |X_0|^{2m})}{k} \\ = t \left( 1 + \frac{(1 + E |X_0|^{2m})}{kt} e^{kt} - \frac{(1 + E |X_0|^{2m})}{kt} \right).$$

Es ist  $\frac{(1+E|X_0|^{2m})}{kt} e^{kt} - \frac{(1+E|X_0|^{2m})}{kt} = (1 + E |X_0|^{2m}) \frac{e^{kt}-1}{kt}$  und nach dem Mittelwertsatz ist  $\frac{e^{kt}-1}{kt} = \frac{kte^{ks}}{kt} \leq e^{kt}$ . Somit gilt

$$\int_0^t [1 + (1 + E |X_0|^{2m}) e^{ks}] ds \leq t \left( \underbrace{1}_{\leq (1+E|X_0|^{2m})e^{kt}} + (1 + E |X_0|^{2m}) e^{kt} \right) \\ \leq 2t(1 + E |X_0|^{2m}) e^{kt}.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$E |X_t - X_0|^{2m} \leq 2^{3m-2} c^{2m} [t^m + (m(2m-1))^m] t^{m-1} \int_0^t [1 + (1 + E |X_0|^{2m}) e^{ks}] ds \\ \leq 2^{3m-2} c^{2m} [t^m + (m(2m-1))^m] t^{m-1} 2t(1 + E |X_0|^{2m}) e^{kt} \\ = \underbrace{2^{3m-1} c^{2m} [t^m + (m(2m-1))^m]}_d (1 + E |X_0|^{2m}) t^m e^{kt}.$$

Daher gilt auch die zweite Abschätzung. □



### Lösungen sind Markov- und Diffusionsprozesse

**Satz 3.2.15.** (cf. [13, S. 119]) Für das Anfangswertproblem (3.2.11) seien die Voraussetzungen von Theorem 3.2.1 erfüllt, sodass die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung garantiert ist. Diese Lösung  $X_t$  ist ein stetiger Markovprozess bezüglich der Filtration  $\mathcal{A}_t$ , sodass

$$P(X_t \in B | \mathcal{A}_s) = P(X_t \in B | X_s) = P(s, X_s, t, B),$$

wobei  $P(s, X_s, t, B)$  die Übergangswahrscheinlichkeit des Prozesses  $X_t$  ist und die Anfangsverteilung durch  $P_0(B) = P(X_0 \in B)$  gegeben ist.

Es gilt sogar ein stärkeres Resultat. Allerdings benötigt man dafür noch folgenden Begriff:

**Definition 3.2.16.** (cf. [14, S. 114]) Sei  $X(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stochastischer Prozess. Dann heißt  $X_t$  *Itô Diffusion*, wenn  $X(t, \omega)$  die autonome stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \text{ für } t \geq s, \text{ wobei } X_s = x$$

erfüllt. Dabei ist  $B_t$  eine  $m$  – dimensionale Brown'sche Bewegung und die Funktionen  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  erfüllen die Lipschitzbedingung (3.2.2).

**Satz 3.2.17.** (cf. [14, S. 117]) Sei  $X_t$  eine Itô Diffusion,  $\tau$  eine endliche Stoppzeit bezüglich  $\mathcal{A}_t^{(m)}$  und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Borel – messbare Funktion. Dann erfüllt  $X_t$  die starke Markoveigenschaft, dh.  $\forall h > 0$  gilt:

$$E[f(X_{\tau+h}) | \mathcal{A}_\tau^{(m)}] = E[f(X_h) | X_\tau(\omega)],$$

wobei  $\mathcal{A}_\tau^{(m)}$  die von den  $\{B_{\tau \wedge s} : s \geq 0\}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra ist und  $E[f(X_h) | X_\tau(\omega)]$  bedeutet:  $E[f(X_h)]$  ausgewertet an der Stelle  $X_\tau(\omega)$ .

**Beweis.** Sei  $X_r^{\tau, X_\tau}$  die Lösung von 3.1.1 mit Anfangswert  $X(\tau) = X_\tau$  zum Zeitpunkt  $r > \tau$ . Um die starke Markoveigenschaft von Lösungen zu zeigen, verwendet man dass für fast alle  $\omega$   $X_r^{\tau, X_\tau}$  der Form

$$X_{\tau+h}^{\tau, x} = x + \int_\tau^{\tau+h} b(X_r^{\tau, x})dr + \int_\tau^{\tau+h} \sigma(X_r^{\tau, x})dB_r,$$

ist, wobei  $x = X_\tau(\omega)$ .

Da die Brown'schen Bewegung ein starker Markovprozess ist, ist  $\hat{B}_u = B_{\tau+u} - B_\tau$  mit  $h \geq 0$  wieder eine Brown'sche Bewegung und unabhängig von  $\mathcal{A}_\tau^{(m)}$ . Es gilt also

$$X_{\tau+h}^{\tau, x} = x + \int_0^h b(X_{\tau+u}^{\tau, x})du + \int_0^h \sigma(X_{\tau+u}^{\tau, x})d\hat{B}_u.$$

Daraus schließt man aufgrund der Eindeutigkeit von Lösungen, dass  $\{X_{\tau+h}^{\tau, x}\}_{h \geq 0}$  und  $\{X_h^{0, x}\}_{h \geq 0}$  dieselbe Verteilung haben.

Sei nun  $F(x, t, r, \omega) = X_r^{t, x}(\omega)$  für  $t \leq r \leq T$ . Setzt man  $h(x, t, r, \omega) = f(F(x, t, r, \omega))$ , dann ist die Abbildung  $h$  messbar und kann durch stückweise beschränkte Funktionen

### 3. STOCHASTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

approximiert werden. Mit Hilfe der Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes folgt daraus die Behauptung.

Für Details sei auf [14, S. 115f] verwiesen.  $\square$

**Satz 3.2.18.** (cf. [13, S. 125]) *Seien  $b$  und  $\sigma$  stetige Funktionen, die die Wachstumsbeschränkung (3.2.1) und die Lipschitzbedingung (3.2.2) von Theorem 3.2.1 erfüllen. Dann ist die Lösung von (3.1.1) ein Diffusionsprozess mit Driftvektor  $b$  und Diffusionsmatrix  $\sigma$  (cf. Definition 2.1.46).*

**Beweis.** Um zu beweisen, dass die Lösung von (3.1.1) ein Diffusionsprozess ist muss man Eigenschaften (i) – (iii) in Definition 2.1.46 zeigen.

$$(i) \text{ zz: } \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| > \epsilon} P(s, x, t, dy) = 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

Da für  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \epsilon^{2+\delta} \int_{|y-x| \geq \epsilon} P(s, x, t, dy) = \int_{|y-x| \geq \epsilon} \underbrace{\epsilon^{2+\delta}}_{\leq |y-x|^{2+\delta}} P(s, x, t, dy) \\ &\leq \int_{|y-x| \geq \epsilon} |y-x|^{2+\delta} P(s, x, t, dy) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |y-x|^{2+\delta} P(s, x, t, dy) \end{aligned}$$

gilt, genügt es zu beweisen, dass  $\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}^n} |y-x|^{2+\delta} P(s, x, t, dy) = 0$ .

Für  $\delta = 2$  gilt

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}^n} |y-x|^4 P(s, x, t, dy) = E_{s,x} |X_t - X_s|^4 \stackrel{(3.2.13)}{\leq} K(t-s)^2$$

für eine Konstante  $K$  und  $0 \leq s \leq t \leq T$ . Zusammengefasst gilt

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| > \epsilon} P(s, x, t, dy) \leq \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}^n} |y-x|^4 P(s, x, t, dy) \leq \lim_{t \downarrow s} K(t-s)^2 \rightarrow 0.$$

$$(ii) \text{ zz: } \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x) P(s, x, t, dy) = f(s, x) \quad \forall \epsilon > 0 \Leftrightarrow E[X_t - X_s | X_s = x] = b(s, x)(t-s) + o(t-s).$$

Nach dem Existenz- und Eindeigkeitssatz erhält man, mit  $E \left| \int_S^T \sigma(s, X_s) dB_s \right| = 0$  (cf. Satz 2.2.12(iv)),

$$\begin{aligned} E(X_t - X_s | X_s = x) &= E(X(t; s, x) - x) \\ &= \int_s^t E[b(u, X(u; s, x))] du \\ &= \int_s^t b(u, x) du + \int_s^t E[b(u, X(u; s, x)) - b(u, x)] du, \end{aligned}$$

dabei ist  $X(t; s, x)$  die Lösung der stochastischen Differentialgleichung  $X_t$  mit  $X_s = x$  zum Zeitpunkt  $t$ .

Nun erhält man mit Hilfe der CS – Ungleichung und der Lipschitzbedingung (3.2.2)

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t E[b(u, X(u; s, x))] - b(u, x) du \right| &\leq \int_s^t E |b(u, X(u; s, x)) - b(u, x)| du \\ &\stackrel{(3.2.4)}{\leq} (t-s)^{\frac{1}{2}} \left( \int_s^t E |b(u, X(u; s, x)) - b(u, x)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{(3.2.2)}{\leq} (t-s)^{\frac{1}{2}} \left( \int_s^t E |X(u; s, x) - x|^2 du \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Wendet man nun wieder Abschätzung (3.2.13) an, so erhält man, dass

$$\left( \int_s^t E |X(u; s, x) - x|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \leq K(t-s).$$

Also gilt für  $t \downarrow s$ :

$$\left| \int_s^t E[b(u, X(u; s, x))] - b(u, x) du \right| \leq (t-s)^{\frac{3}{2}} O(1).$$

Weiters ist wegen der Stetigkeit von  $b$  in der ersten Variablen

$$\begin{aligned} \int_s^t b(u, x) du &= b(s, x)(t-s) + \int_s^t b(u, x) - b(t, x) du \\ &= b(s, x)(t-s) + o(t-s). \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} E(X_t - X_s | X_s = x) &= \int_s^t b(u, x) du + \int_s^t E[b(u, X(u; s, x))] - b(u, x) du \\ &= b(s, x)(t-s) + o(t-s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii) zz: } \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)(y-x)^t P(s, x, t, dy) &= G(s, x) \quad \forall \epsilon > 0 \Leftrightarrow \\ E[X_t - X_s | X_s = x]^2 &= \sigma^2(s, x)(t-s) + o(t-s). \end{aligned}$$

Ähnlich wie in Punkt (ii).

□

### Beschränktheit von Lösungen

**Definition 3.2.19.** (cf. [6, S. 128]) Sei das AWP (3.2.11) gegeben, wobei  $b$  und  $\sigma$  wie in Theorem 3.2.1 sind und  $b$  und  $\sigma$  zumindest lokal lipschitzstetig sind. Die Lösung  $X_t$  mit Anfangsbedingung  $X(0) = X_0$ , dh.  $X(t; t_0 = 0, X_0)$ , ist *stochastisch beschränkt*, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists \beta_\epsilon = \beta_\epsilon(0, X_0) > 0 \text{ sodass } \inf_{0 \leq t \leq T} P(|X_t| \leq \beta_\epsilon) > 1 - \epsilon.$$

### 3. STOCHASTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Die Lösung  $X_t = X(t; 0, X_0)$  ist *gleichmäßig stochastisch beschränkt*, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists \beta_\epsilon = \beta_\epsilon(X_0) > 0 \text{ sodass } \inf_{0 \leq t \leq T} P(|X_t| \leq \beta_\epsilon) > 1 - \epsilon.$$

Weiters benötigt man noch folgende Definition.

**Definition 3.2.20.** (cf. [6, S. 28]) Sei  $X_t$  ein Markovprozess und  $H \subset \mathbb{R}^n$  eine abgeschlossene Menge. Dann heißt  $\tau = \inf\{t : X_t \in H\}$  die *erste Treffzeit*.

Um auf die Beschränktheit der Lösung der stochastischen Differentialgleichung (3.1.1) eingehen zu können, definiert man zunächst noch folgende Funktion:

$$LV(t, x) := \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla_x V \cdot b + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma \sigma^t V_{xx}) \right] (t, x),$$

wobei  $\text{tr}$  die Spur der Matrix  $\sigma \sigma^t V_{xx}$  ist.

**Satz 3.2.21.** (cf. [6, S. 129]) Sei  $V(t, x)$  eine nicht-negative, stetige Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen  $\frac{\partial V}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial x_i}$  und  $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ , sodass  $V$  folgende Bedingungen erfüllt:

(i) für  $f$  und  $g$  stetige Funktionen mit  $f(|x|) \rightarrow \infty$  für  $|x| \rightarrow \infty$  gilt

$$f(|x|) \leq V(t, x) \leq g(|x|)$$

(ii) für  $t > 0$  und  $|x| \geq c = \text{konstant}$  gilt:  $LV(t, x) \leq 0$

Sei weiters  $\tau = \tau_c$  die erste Treffzeit von  $\{|x| > c\}$  für die Lösung  $X_t$  von (3.2.11) mit  $|X_0| > c$ . Dann gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \beta_\epsilon = \beta_\epsilon(X_0) > 0 \text{ sodass } P\left(\sup_{0 \leq t \leq \tau} |X_t| \leq \beta_\epsilon\right) > 1 - \epsilon.$$

**Beweis.** (cf. [6, S. 129f]) Für eine positive Zahl  $N$  mit  $c < N$  sei  $\tau_N$  die erste Treffzeit der Lösung  $X_t$ , die die Umgebung  $c < |x| < N$  verlässt. Setzt man  $\tau_N(t) = \tau_N \wedge t = \min(\tau_N, t)$  mit dem zugehörigen Stoppprozess  $X_N(t) = X(\tau_N(t))$ , so erhält man mit Itô's Formel:

$$\begin{aligned} V(t, X_N(t)) - V(s, X_N(s)) &= \int_s^t LV(u, X_N(u)) du + \int_s^t \nabla_x V \cdot \sigma(u, X_N(u)) dB_u \\ &\stackrel{(ii)}{\leq} \int_s^t \nabla_x V \cdot \sigma(u, X_N(u)) dB_u \text{ mit } 0 \leq s \leq t. \end{aligned}$$

Sei weiters  $\mathcal{A}_t$  die von der Lösung  $\{X_s : s \leq t\}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra. Berechnet man nun bei gegebenem  $\mathcal{A}_s$  den bedingten Erwartungswert, so erhält man

$$E(V(t, X_N(t)) - V(s, X_N(s))) \leq E\left(\int_s^t \nabla_x V \cdot \sigma(u, X_N(u)) dB_u\right) \stackrel{2.2.12(iv)}{=} 0.$$

Daher ist  $V$  ein Supermartingal für  $N > c$  (cf. Bemerkung 2.1.52). Mit Hilfe einer Eigenschaft für Supermartingale (cf. [6, S. 49]) erhält man:

$$P\left(\sup_{t \in [0, T]} V(t, X_N(t)) > \alpha\right) \leq \frac{1}{\alpha} V(0, X_0) \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall T > 0.$$

Für  $N \rightarrow \infty$  gilt  $\tau_N \rightarrow \tau$  und man erhält für beliebiges  $T$ :

$$P \left( \sup_{t \in [0, \tau]} V(t, X(t)) > \alpha \right) \leq \frac{1}{\alpha} V(0, X_0).$$

Durch (i) erhält man

$$P \left( \sup_{t \in [0, \tau]} f(X_t) > \alpha \right) \leq \frac{1}{\alpha} g(|X_0|).$$

Nun sei  $\epsilon > 0$ . Dann  $\exists \alpha > 0$  mit  $\frac{1}{\alpha} g(|X_0|) < \epsilon$ . Zu diesem  $\alpha$  gibt es ein  $\beta_\epsilon = \beta$ , sodass aus  $|x| > \beta$  folgt dass  $f(x) > \alpha$ , da  $f(|x|) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ . Daher gilt:

$$P \left( \sup_{t \in [0, \tau]} |X_t| > \beta \right) \leq \frac{1}{\alpha} g(|X_0|) < \epsilon$$

und somit

$$P \left( \sup_{t \in [0, \tau]} |X_t| \leq \beta_\epsilon \right) > 1 - \epsilon.$$

□

**Bemerkung 3.2.22.** Solche Funktionen  $V$  nennt man Liapunovfunktionen.

### 3.3 Numerische Approximation der Lösung

Da es oft nicht möglich ist die Lösung einer stochastischen Differentialgleichung analytisch anzugeben, muss man sich mit einer numerischen Approximation begnügen. Daher wird hier als kleiner Ausblick eine Methode vorgestellt, wie man dabei vorgeht.

#### 3.3.1 Euler – Approximation für stochastische Differentialgleichungen

Analog zur Euler – Methode für gewöhnliche Differentialgleichungen, führt diese Methode zu einer Approximation der Lösung einer stochastischen Differentialgleichung für diskrete Zeit.

Sei also  $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$  ein Itô – Prozess, der die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \text{ mit } X(0) = X_0 \quad (3.3.1)$$

erfüllt, wobei  $b(\cdot, \cdot) : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\sigma(\cdot, \cdot) : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  sind.

**Definition 3.3.1.** (cf. [21, S. 305]) Sei  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  eine Partition des Intervalls  $[0, T]$ . Dann ist die *Euler – Approximation* definiert als ein stetiger stochastischer Prozess  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ , der durch folgendes iterative Verfahren festgelegt ist:

$$Y_{i+1} = Y_i + b(t_i, Y_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(t_i, Y_i)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

für  $i = 0, \dots, n-1$  mit Anfangsbedingung  $Y_0 = X_0$  und  $Y_i = Y(t_i)$ , dem Wert der Approximation zum Zeitpunkt  $t_i$ .

### 3. STOCHASTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

---

Es wird angenommen, dass die Zeitpunkte äquidistant sind, dh.  $t_i = t_0 + i \cdot \frac{t_n - t_0}{n} = i \cdot \frac{T}{n}$  mit Schrittweite  $\frac{T}{n}$  für ein  $n$ .

Die wichtigsten Fragen sind nun die der Konvergenz, des lokalen und globalen Fehlers und die numerische Stabilität der Lösung, dh. ob sich Rechenfehler in unbeschränkter Art vermehren.

Verschwindet der Diffusionskoeffizient, dh.  $\sigma \equiv 0$ , dann kann man das Euler – Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen benutzen (cf. [18, S. 47]). Im Falle der stochastischen Differentialgleichungen ist die Euler – Methode ähnlich zu berechnen, mit dem Unterschied, dass man die Zufallsinkremente der Brown'schen Bewegung  $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$  für  $i = 0, \dots, n - 1$  erzeugen muss.

Da man mit der Euler – Methode nur Werte zu den Zeitpunkten  $t_i$  erhält, muss man die Werte dazwischen mittels Interpolation berechnen. Die gebräuchlichste dabei ist die *lineare Interpolation*, die durch

$$Y_t = Y_{\tilde{i}} + \frac{t - t_{\tilde{i}}}{t_{\tilde{i}+1} - t_{\tilde{i}}} (Y_{\tilde{i}+1} - Y_{\tilde{i}})$$

definiert ist, wobei  $\tilde{i} = \max\{i = 0, \dots, n - 1 : t_i \leq t\}$ . Sie ist im Gegensatz zu anderen Methoden stetig und recht einfach.

**Beispiel 3.3.2.** Gegeben ist die Differentialgleichung ( $t_0 = 0$ )

$$dX_t = X_t dB_t \text{ mit } X(0) = X_0.$$

In diesem Fall ist  $b = 0$  und  $\sigma(t, X_t) = \sigma(X_t) = X_t$ . Zunächst berechnet man die exakte Lösung.

$$dX_t = X_t dB_t \Leftrightarrow \frac{dX_t}{X_t} = dB_t \Leftrightarrow \int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = \int_0^t dB_s.$$

Nun verwendet man die Itô Formel mit  $h(t, x) = 1 \cdot x$ . Somit wird die rechte Seite der Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned} d(1 \cdot B_t) &= 1 \cdot dB_t + \frac{1}{2}(dB_t)^2 = dB_t + \frac{1}{2}dt \\ \Leftrightarrow 1 \cdot B_t &= \int_0^t 1 \cdot dB_t + \frac{1}{2}t \\ \Leftrightarrow \int_0^t 1 \cdot dB_t &= -\frac{1}{2}t + 1 \cdot B_t \end{aligned}$$

und man erhält insgesamt:

$$\begin{aligned} \ln \frac{X_t}{X_0} &= -\frac{1}{2}t + 1 \cdot B_t \\ \Leftrightarrow X_t &= X_0 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}t + B_t\right). \end{aligned}$$

Nun zur approximierten Lösung mit Hilfe des Eulerverfahrens. Sei  $Y_i = \tilde{X}_i$ , dann ist die numerische Lösung rekursiv durch

$$\begin{aligned}\tilde{X}_0 &= X_0 \\ \tilde{X}_{i+1} &= \tilde{X}_i + \tilde{X}_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\end{aligned}$$

gegeben.

Im Folgenden sei nun  $\Delta_{t_i} = t_i - t_{i-1} =: \Delta_t$  konstant und sei  $\Delta B_{t_i} := B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ . Auf Grund der Definition der Brown'schen Bewegung gilt  $E[\Delta B_{t_i}] = 0$  und  $\text{Var}[\Delta B_{t_i}] = \Delta_t$ . Für die nun folgenden numerischen Berechnungen wurde das Programm *SCILAB* verwendet, das unter <http://www.scilab.org/> heruntergeladen werden kann. In *SCILAB* gibt es die Funktion `rand`, mit der (Pseudo-)Zufallszahlen erzeugt werden können, die wahlweise gleich- oder standardnormalverteilt sind. Eine mittels des Algorithmus' 1 erzeugte Brown'sche Bewegung ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

---

**Algorithm 1** Erzeugung einer Brown'schen Bewegung  $B_t$  auf  $[0, 1]$  mittels *SCILAB*.

---

```

1: Setze  $\Delta_t = 0.02$  und  $n = 50$ 
2:  $\Delta B_t = \sqrt{\Delta_t} \cdot \text{rand}(1, n, \text{'normal'})$ 
3: Setze  $B_0 = 0$ 
4: for  $i = 1$  to  $n$  do
5:    $B_{t_{i+1}} = B_{t_i} + \Delta B_{t_{i+1}}$ 
6: end for
```

---

In Abbildung 3.2 ist die exakte Lösung des Problems und die mit dem Eulerverfahren berechnete Approximation auf dem Intervall  $[0, 1]$  mit  $\Delta_t = 0.02$  dargestellt. Dabei wurde  $X_0 = \tilde{X}_0 = 1$  gewählt. Die Berechnung der Lösung ist in Algorithmus 2 beschrieben.

Die Genauigkeit des numerischen Ergebnisses hängt, neben der Differentialgleichung selbst, vom gewählten Zeitschritt  $\Delta_t$  ab. Je kleiner dieser ist, desto genauer wird das Ergebnis (sieht man von Rundungsfehlern ab, die dann immer größer werden). Wählt man den Zeitschritt zu groß, konvergiert das Eulerverfahren nicht gegen die analytische Lösung. Darauf wird in den folgenden Beispielen noch genauer eingegangen werden.

Die hier abgebildeten Lösungen hängen zum Einen von der Skalierung und zum Anderen von der Brown'schen Bewegung ab, die bei jeder Durchführung des Algorithmus' eine andere (zufällige) Gestalt haben wird. Betrachtet man die Lösung auf einem größeren Intervall als  $[0, 1]$ , wird der asymptotische Teil der exakten Lösung  $\exp(-\frac{1}{2}t)$  bestimmend für die Gestalt der Lösungskurve sein.

Um nun den Fehler  $\epsilon$  der approximierten Lösung zur exakten Lösung zu berechnen verwendet man das *absolute Fehlerkriterium*. Dieses besagt, dass der Fehler der Erwartungswert der Differenz beider Lösungen ist, dh.

$$\epsilon = E \left( \left| X_t - \tilde{X}_t \right| \right).$$

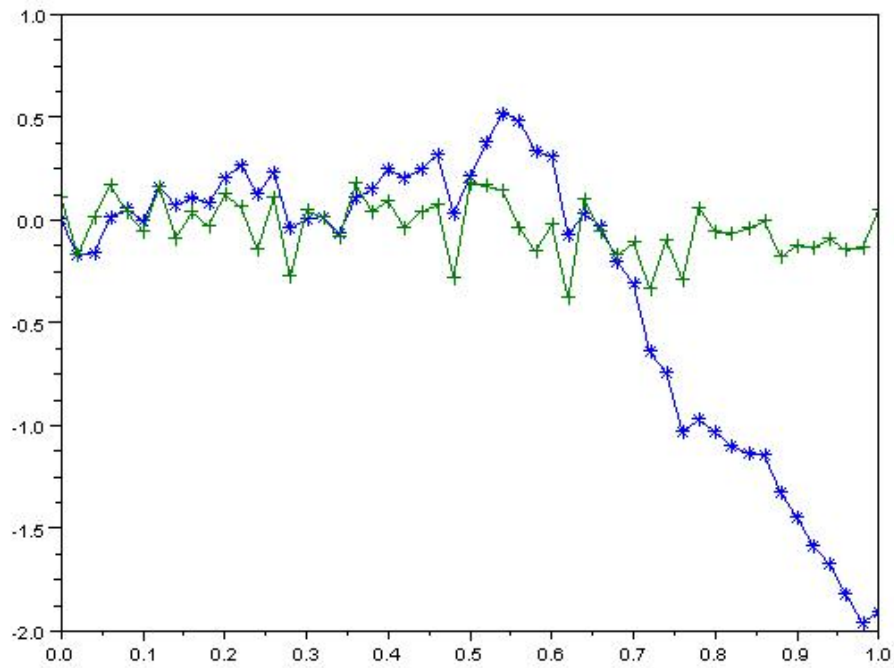


Abbildung 3.1: Eine mittels Algorithmus 1 erzeugte Brown'sche Bewegung  $B_t$  auf  $[0, 1]$  (\*) und die zugehörigen normalverteilten Zuwächse  $\Delta B_{t_i} = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$  (+).

---

**Algorithm 2** Berechnung der exakten Lösung  $X_i$  und der approximierten Lösung  $\tilde{X}_i$ .

---

- 1: Setze  $\Delta_t = 0.02$  und  $n = 50$
  - 2: Setze  $X_0 = 1$
  - 3: Setze  $\tilde{X}_0 = 1$
  - 4: **for**  $i = 1$  to  $n$  **do**
  - 5:    $X_{i+1} = \exp[-0.5 \cdot \Delta_t \cdot i + B_{t_{i+1}}]$
  - 6:    $\tilde{X}_{i+1} = \tilde{X}_i + \tilde{X}_i \cdot \Delta B_{t_{i+1}}$
  - 7: **end for**
-



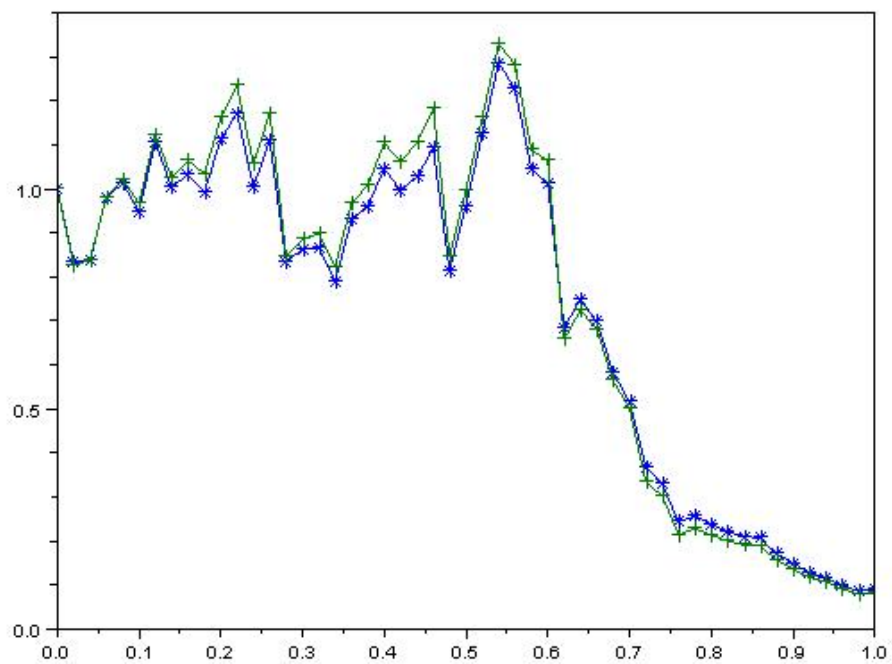


Abbildung 3.2: Die mittels Algorithmus 2 berechnete exakte Lösung (\*) und die mit dem Eulerverfahren bestimmte approximierte Lösung (+) zur in Abbildung 3.1 dargestellten Brown'schen Bewegung.

### 3. STOCHASTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

---

Um dieses Fehlerkriterium numerisch abzuschätzen, verwendet man  $m$  Realisierungen der Lösung  $X_t$  und der approximierten Lösung  $\tilde{X}_t$ . Der absolute Fehler zum Zeitpunkt  $\tau$ , wobei sich der Index  $k$  auf die  $k$ -te Realisierung bezieht, ist dann gegeben durch

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m |X_{\tau,k} - \tilde{X}_{\tau,k}|.$$

Da es aber nicht möglich ist unendlich viele Realisierungen erzeugen zu lassen, versucht man ein Konfidenzintervall anzugeben. Dazu schätzt man die Varianz  $\sigma_{\tilde{\epsilon}}^2$  von  $\tilde{\epsilon}$  ab und konstruiert mit dessen Hilfe ein Konfidenzintervall für  $\epsilon$ . Dazu teilt man  $m$  Simulationen in  $M$  Gruppen ein und schätzt die Varianz von  $\tilde{\epsilon}$  wie folgt ab (cf. [21, S 312]):

Der mittlere Fehler in Gruppe  $i$  ist gegeben durch

$$\hat{\epsilon}_i = \sum_{k=1}^m |X_{\tau,k,i} - \tilde{X}_{\tau,k,i}|,$$

wobei  $i = 1, \dots, m$ . Mit dessen Hilfe kann man die *Student t - Verteilung* benutzen um ein Konfidenzintervall für annähernd Gauß'sche Zufallsvariablen mit unbekannter Varianz anzugeben. Der gemittelte Fehler der Gruppenmittelwerte ist dann

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\epsilon}_i = \frac{1}{mM} \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^m |X_{\tau,k,i} - \tilde{X}_{\tau,k,i}|,$$

für den man die Varianz der Gruppenmittelwerte wie folgt schätzen kann:

$$\sigma_{\hat{\epsilon}}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (\hat{\epsilon}_i - \hat{\epsilon})^2.$$

Das Konfidenzintervall für  $\epsilon$  bei  $m$  Realisierungen hat die Form  $(\hat{\epsilon} - \Delta\hat{\epsilon}; \hat{\epsilon} + \Delta\hat{\epsilon})$ , wobei  $\Delta\hat{\epsilon} = t_{1-\alpha, M-1} \sqrt{\frac{\sigma_{\hat{\epsilon}}^2}{M}}$  ist und  $t_{1-\alpha, M-1}$  die Student -  $t$  - Verteilung mit  $M-1$  Freiheitsgraden.

**Beispiel 3.3.3.** Um eine analytische Fehlerabschätzung bezüglich der  $L^2$  - Norm für die in Beispiel 3.3.2 berechnete Approximation zu berechnen betrachten wir die exakte, mit Hilfe des Satzes von Taylor entwickelte, und die numerische Lösung bei einem Schritt der Weite  $h$ .

Im Folgenden wird das Landausymbol  $O$  verwendet, um das asymptotische Verhalten der Lösung zu beschreiben. Es sei bemerkt, dass  $B_h = B_{t_1} - B_{t_0} = O(h)$ .

Die exakte Lösungen ist dann also:

$$\begin{aligned} X_h &= X_0 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}h + B_h\right) \\ &= X_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{2}h + B_h + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}h + B_h\right)^2 + O((h + |B_h|)^3)\right] \\ &= X_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{2}h + B_h + \frac{1}{2}B_h^2 + O(h^2) + O(h|B_h|) + O((|B_h|)^3)\right]. \end{aligned}$$

Für die approximierte Lösung ergibt sich:

$$\tilde{X}_h = \tilde{X}_0 \cdot [1 + (B_{t_1} - B_{t_0})] = \tilde{X}_0 \cdot [1 + B_h].$$

Somit ist der Fehler:

$$\begin{aligned} E \left[ |X_h - \tilde{X}_h|^2 \middle| X_0 = \tilde{X}_0 \right] &= X_0^2 \cdot E \left[ 1 - \frac{1}{2}h + B_h + \frac{1}{2}B_h^2 + O(h^2) + O(h|B_h|) + \right. \\ &\quad \left. O((|B_h|)^3) - (1 + B_h) \right]^2 \\ &= X_0^2 \cdot E \left[ -\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}B_h^2 + O(h^2) + O(h|B_h|) + O((|B_h|)^3) \right]^2 \\ &= O(h^2). \end{aligned}$$

**Beispiel 3.3.4.** Nun wird das Beispiel des Bevölkerungswachstums, beschrieben durch die stochastische Differentialgleichung  $dN_t = c \cdot N_t dt + a \cdot N_t dB_t$ ,  $N(0) = N_0$ , wieder aufgegriffen. Nach Beispiel 3.2.6 ist die exakte Lösung gegeben durch

$$N_t = N_0 \cdot \exp \left( c \cdot t - \frac{a^2}{2} \cdot t + a \cdot B_t \right).$$

Mit Hilfe des Eulerverfahrens erhält man nun für die approximierte Lösung folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_0 &= N_0 \\ \tilde{N}_{i+1} &= \tilde{N}_i + c \cdot \tilde{N}_i(t_{i+1} - t_i) + a \cdot \tilde{N}_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}). \end{aligned}$$

---

**Algorithm 3** Berechnung der exakten Lösung  $N_i$  und der approximierten Lösung  $\tilde{N}_i$ .

---

```

1: Setze  $\Delta_t = 0.1, a = 1, c = 1, n = 200$ 
2: Speichere die Anfangsbedingung  $N_0 = 1$  für die exakte Lösung  $N$ 
3: Speichere die Anfangsbedingung  $\tilde{N}_0 = 1$  für die numerische Lösung  $\tilde{N}$ 
4: Speichere die Anfangsbedingung  $B_0 = 0$  für die Brown'sche Bewegung  $B$ 
5:  $\Delta_{B_t} = \sqrt{\Delta_t} \cdot \text{rand}(1, n, \text{'normal'})$ 
6: for  $i = 1$  to  $n - 1$  do
7:    $B_{t_{i+1}} = B_{t_i} + \Delta B_{t_{i+1}}$ 
8:    $N_{i+1} = N_0 \cdot \exp \left( c \cdot \Delta_t \cdot i - 0.5 \cdot a^2 \cdot \Delta_t \cdot i + a \cdot B_{t_{i+1}} \right)$ 
9:    $\tilde{N}_{i+1} = \tilde{N}_i + c \cdot \tilde{N}_i \cdot \Delta_t + a \cdot \tilde{N}_i \cdot \Delta B_{t_{i+1}}$ 
10: end for

```

---

In den Abbildungen 3.3, 3.4 und 3.5 sind drei Realisierungen der exakten und der mittels der Eulerapproximation berechneten numerischen Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung dargestellt. Dabei wurde  $a = c = 1, \Delta_t = 0.1$  sowie  $N(0) = 1$  gewählt. Je nach Darstellung und zugehöriger Brown'scher Bewegung ist das Aussehen der Lösungskurve sehr verschieden. Außerdem sieht man, dass die Eulerapproximation bei der hier gewählten Schrittweite in manchen Fällen eine schlechte Näherung liefert, sodass entweder kleinere Zeitschritte oder ein anderes Verfahren eingesetzt werden müssten. In Algorithmus 3 ist in Pseudocode die Berechnung der exakten und der approximierten Lösung dargestellt.

### 3. STOCHASTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

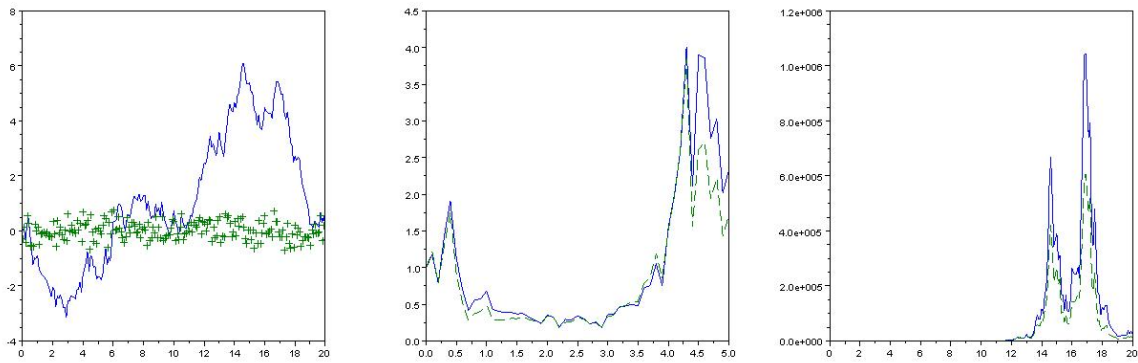


Abbildung 3.3: linkes Bild:  $B_t$  (Linie) und  $\Delta B_t$  (+); mittleres Bild:  $N_i$  (durchgezogene Linie) und  $\tilde{N}_i$  (strichliert) auf  $[0, 5]$ ; rechtes Bild:  $N_i$  (durchgezogene Linie) und  $\tilde{N}_i$  (strichliert) auf  $[0, 20]$  (Reihenfolge auf allen drei Bildern gleich)

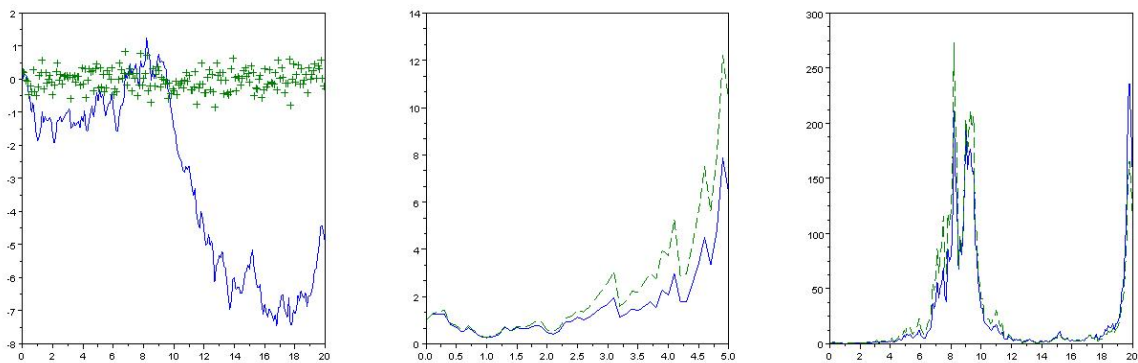


Abbildung 3.4: Für diesen Zufallspfad ist die Eulerapproximation im Bereich  $[0, 5]$  schlecht.

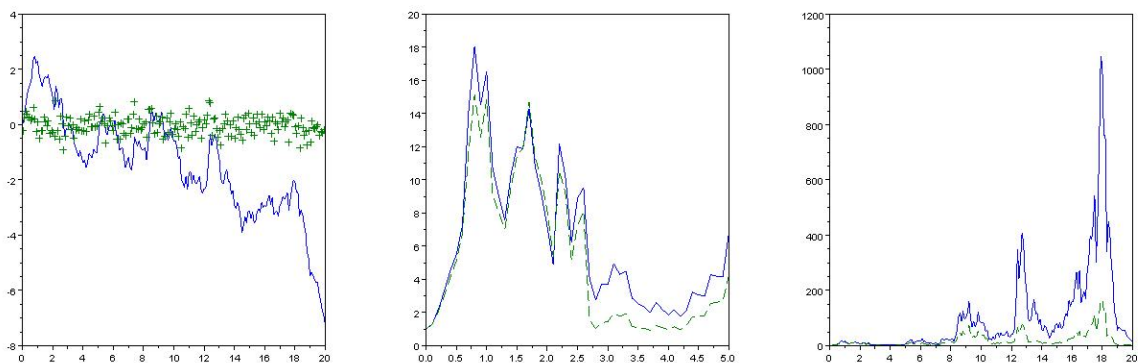


Abbildung 3.5: Für diesen Zufallspfad ist die Eulerapproximation im Bereich  $[15, 20]$  sehr schlecht.

Nun soll wie zuvor beschrieben der Fehler des Eulerverfahrens bei dem Beispiel des Bevölkerungswachstums mit Hilfe von numerischen Simulationen geschätzt werden. Dabei sei  $a = 1.5$ ,  $c = 0.1$  und  $N_0 = 1$ . Wir betrachten Lösungen auf  $[0, 1]$  mit den Schrittweiten  $\Delta_t = 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}$  und  $2^{-5}$ . Dabei werden in 20 Gruppen jeweils 100 Simulationen durchgeführt.

Wiederum wurden die Simulationen mit *SCILAB* berechnet. Der dabei verwendete Code ist in Algorithmus 4 beschrieben. Das in diesem Algorithmus berechnete  $\Delta\hat{\epsilon}_l$  bezieht sich auf ein Konfidenzintervall von 90%. Für  $1 - \alpha = 0.9$  und  $M = 20$  ist  $t_{1-\alpha, M-1} \approx 1.73$ .

---

**Algorithm 4** Berechnung eines Schätzers für den Approximationsfehler des Eulerverfahrens.

---

```

1: Setze  $a = 1.5$  und  $c = 0.1$ 
2: Setze  $n_\Delta = 5$ 
3: Setze die Anzahl der Gruppen  $n_G = 20$ 
4: Setze die Anzahl der Simulationen pro Gruppe  $n_S = 100$ 
5: for  $l = 1$  to  $n_\Delta$  do
6:   for  $k = 1$  to  $n_G$  do
7:     for  $j = 1$  to  $n_S$  do
8:        $\Delta_t = 2^{-l}$  und  $n = 2^l + 1$ 
9:       Erzeuge eine neue Brown'sche Bewegung
10:      Berechne  $N_j$  und  $\tilde{N}_j$  wie in Algorithmus 3
11:     end for
12:      $\hat{\epsilon}_{k,l} = \frac{1}{n_S} \sum_{j=1}^{n_S} |N_j(n) - \tilde{N}_j(n)|$ 
13:   end for
14:    $\hat{\epsilon}_l = \frac{1}{n_G} \sum_{k=1}^{n_G} \hat{\epsilon}_{k,l}$ 
15:    $\sigma_{\epsilon,l}^2 = \frac{1}{n_G-1} \sum_{k=1}^{n_G} (\hat{\epsilon}_{k,l} - \hat{\epsilon}_l)^2$ 
16:    $\Delta\hat{\epsilon}_l = 1.73 \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{\epsilon,l}^2}{n_G}}$ 
17: end for

```

---

In der Tabelle 3.1 sind die mittleren Fehler in jeder Gruppe abhängig von der Gitterweite  $\Delta_t$  aufgezeichnet. Die mittleren Fehler in den Gruppen sind auch bei gleicher Gitterweite deutlich unterschiedlich. In jeder Gruppe nimmt die Größe des Fehler aber ab, wenn die Gitterweite kleiner wird. Je mehr Gruppen verwendet werden, desto besser wird letztlich die Schätzung des Fehlers sein, ebenso wie eine größere Anzahl von Simulationen pro Gruppe zu geringeren Abweichungen zwischen den Gruppen und damit auch zu einer besseren Schätzung führen. Die hier verwendeten Gruppengrößen und -anzahlen beruhen größtenteils auf Erfahrungswerten und sind [21, S. 310ff] entnommen.

In Abbildung 3.6 ist  $\hat{\epsilon}_l$  zusammen mit dem zugehörigen 90% Konfidenzintervall in Abhängigkeit von der Gitterweite  $\Delta_t$  abgebildet. Daraus ist zu erkennen, dass sowohl die mittlere Größe des Fehlers als auch die durchschnittliche Abweichung vom Mittelwert beim Eulerverfahren abnimmt, je kleiner die Gitterweite ist. Die Geschwindigkeit der Abnahme ist verfahrensimmanent. Weitere Details sind wiederum in [21, S. 342f] zu entnehmen.

$\Delta_t$	$2^{-1}$	$2^{-2}$	$2^{-3}$	$2^{-4}$	$2^{-5}$
$\hat{\epsilon}_1$	0.9406645	0.6753938	0.5719070	0.2990835	0.1733136
$\hat{\epsilon}_2$	0.8496636	1.3381153	0.4158840	0.4561506	0.1774209
$\hat{\epsilon}_3$	1.0919079	0.7882760	0.5134479	0.3271314	0.2015630
$\hat{\epsilon}_4$	0.6608021	0.7099815	0.5143811	0.4576037	0.1528689
$\hat{\epsilon}_5$	0.7541687	0.7718090	0.3044288	0.3776830	0.2708486
$\hat{\epsilon}_6$	0.8752915	0.5835042	0.5478224	0.3122798	0.2129669
$\hat{\epsilon}_7$	0.7939044	0.9197324	0.4374342	0.3512003	0.2277158
$\hat{\epsilon}_8$	0.8998201	0.6663890	0.5413963	0.4770434	0.2554397
$\hat{\epsilon}_9$	0.8554199	0.6877964	0.4055454	0.3351769	0.2805789
$\hat{\epsilon}_{10}$	0.9134396	0.7458219	0.7952173	0.3028905	0.1981510
$\hat{\epsilon}_{11}$	1.2631041	0.5743227	0.4749057	0.4931255	0.2380898
$\hat{\epsilon}_{12}$	0.7199086	0.8537500	0.4994378	0.3125447	0.2475806
$\hat{\epsilon}_{13}$	1.0084752	0.6860068	0.5220203	0.3410092	0.2069837
$\hat{\epsilon}_{14}$	1.0482249	0.5548786	0.3988095	0.3893901	0.5295602
$\hat{\epsilon}_{15}$	0.9286748	0.6847144	0.3846590	0.4201698	0.3004361
$\hat{\epsilon}_{16}$	0.8236223	0.6641092	0.4868374	0.3090439	0.3435273
$\hat{\epsilon}_{17}$	0.7703898	0.5831954	0.5099987	0.4118266	0.2394953
$\hat{\epsilon}_{18}$	0.6780939	0.8552441	0.5834273	0.2903495	0.2938607
$\hat{\epsilon}_{19}$	1.4668036	1.0744103	0.2904746	0.4220132	0.2482164
$\hat{\epsilon}_{20}$	0.9908964	0.6734536	0.4553841	0.3599874	0.2848091

Tabelle 3.1: Die berechneten  $\hat{\epsilon}_k$  in Abhängigkeit von der Gitterweite  $\Delta_t$ .

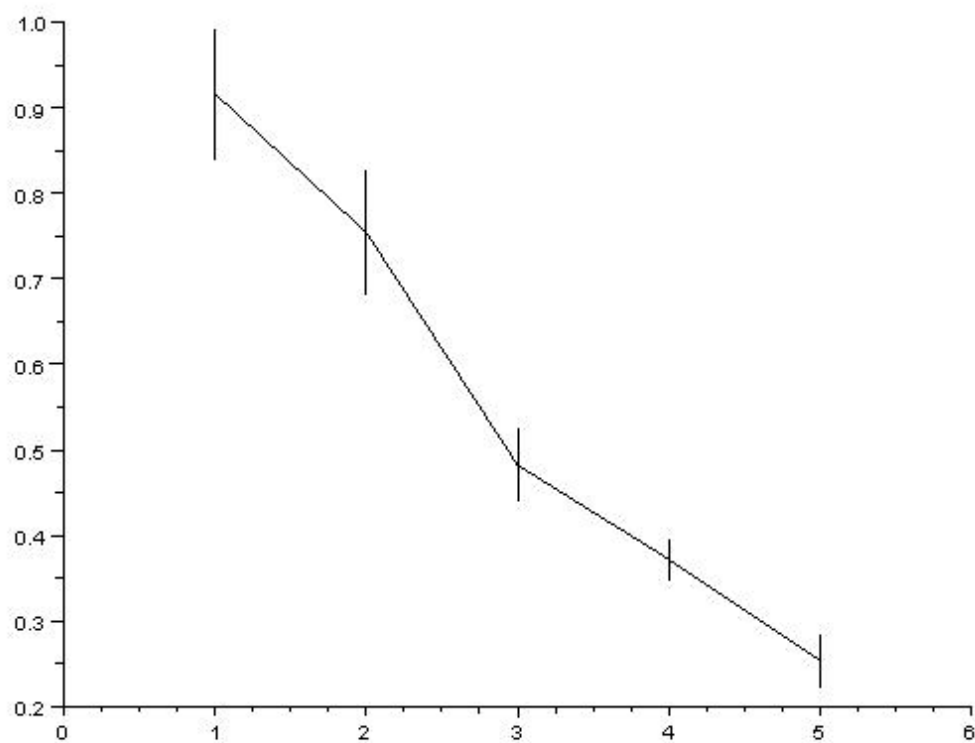


Abbildung 3.6:  $\hat{\epsilon}$  und zugehörige 90% Konfidenzintervalle in Abhängigkeit von der Gitterweite  $-\log_2 \Delta_t$ .





# Literaturverzeichnis

- [1] Ludwig Arnold. *Stochastische Differentialgleichungen: Theorie und Anwendungen*. Oldenbourg, München, 1973.
- [2] Heinz Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. de Gruyter, Berlin, 2001.
- [3] Kai L. Chung. *A course in probability theory*. Harcourt, Brace und World, inc., New York, 1968.
- [4] Kai L. Chung. *Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastische Prozesse*. Springer, Berlin, 1978.
- [5] Thomas Deck. *Der Itô – Kalkül: Einführung und Anwendung*. Springer, Berlin, 2006.
- [6] Thomas C. Gard. *Introduction to Stochastic Differential Equations*, volume 114 of *Monographs and textbooks in pure and applied mathematics*. Marcel Dekker, inc., New York, 1988.
- [7] Crispin W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and Natural Sciences*, volume 13 of *Springer Series in Synergetics*. Springer, Berlin, 1983.
- [8] Franz Hofbauer. Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie: Martingale und stochastisches Integral, 2007. Skript zur Vorlesung Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie, Universität Wien.
- [9] Albrecht Irle. *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik: Grundlagen – Resultate – Anwendungen*. Teubner, Stuttgart, 2001.
- [10] Kiyoshi Itô. *Lectures on Stochastic Processes*. Springer, Berlin, 1984.
- [11] H. P. McKean Jr. *Stochastic Integrals*, volume 5 of *Probability and mathematical Statistics: A Series of Monographs and Textbooks*. Academic Press, New York, 1969.
- [12] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Probability and its Applications. Springer, New York, 2002.
- [13] Gopinath Kallianpur. *Stochastic Filtering Theory*, volume 13 of *Applications of Mathematics*. Springer, New York, 1980.
- [14] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, Berlin, 2003.

- [15] Philip E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*, volume 21 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer, Berlin, 2005.
- [16] Steven E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous – Time Models*. Springer Finance Series. Springer, New York, 2004.
- [17] J. Michael Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications*, volume 45 of *Applications of Mathematics*. Springer, New York, 2001.
- [18] Gerald Teschl. Ordinary differential equations and dynamic systems. <http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/>, 25. 10. 2010. Skript zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen, Universität Wien.
- [19] L. C. G. Rogers und David Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales II: Itô Calculus*. Wiley series in probability and mathematical statistics. John Wiley and Sons, Chichester, 1987.
- [20] L. C. G. Rogers und David Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales I: Foundations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [21] Peter E. Kloeden und Eckhard Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, volume 23 of *Applications of Mathematics*. Springer, Berlin, 1992.
- [22] Kai L. Chung und Ruth J. Williams. *Introduction to stochastic integration*. Birkhäuser, Boston, 1990.
- [23] Daniel W. Stroock und S. R. S. Varadhan. *Multidimensional Diffusion Processes*, volume 233 of *A Series of Comprehensive Studies in Mathematics*. Springer, New York, 1979.
- [24] Ioannis Karatzas und Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus: Second Edition*. Springer, New York, 1991.

# Curriculum Vitae

Name:	Alice Lakits
Geburtsdatum/-ort:	7. Mai 1986, Wien
Staatsbürgerschaft:	Österreich
Reifeprüfung:	GRG 13, 1130 Wien, Wenzgasse 7, Österreich 14. Juni 2004
Diplomstudium Mathematik:	Wintersemester 2006 – Wintersemester 2010, 9 Semester
Lehramtstudium Mathematik:	Wintersemester 2004 – Wintersemester 2010, Zweifach: Geschichte, Sozialkunde und Politische Bildung 13 Semester